Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Exercices, Année 2005-2006

Intégration.

Exercice 1 (Recherche partie prépondérante pour obtenir un équivalent)

On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt$.

1) Déterminer le domaine de définition D_Φ de Φ.

2) Etablir un équivalent de Φ en $x = 0$.

3) Montrer que Φ est continue sur D_Φ.

Exercice 2 (Limite d'une suite d'intégrales)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{nf(t)}{1+n^2t^2}\,dt$.

1) Montrer la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Etudier la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 (Inégalités arithmético-géométrique)

Soient p_k des réels entre 0 et 1 tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^n p_k = 1$ et x_k des réels strictement positifs.

On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n p_k x_k$ et $G_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n x_k^{p_k}$. Soit $J(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(x+yt)^2}\,dt$ pour $x, y > 0$.

1) Montrer que $J(x,y) = \dfrac{-1}{(x-y)^2}\ln\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y(x-y)}$ pour $x \neq y$.

2) En déduire que $\dfrac{A_n}{G_n} = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n p_k(x_k - A_n)^2 J(x_k, A_n)\right)$.

3) Conclure que $A_n \geq G_n$. (Inégalité de Cauchy).

Exercice 4 (Translations et limites)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.

1) On suppose f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\,dt = 0$.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\,dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$.

Bibliographie :

- Chambert-Loir, Fermigier, Maillot, Analyse 1 (ex 3)
- Gourdon (ex 4)
- Grands classiques oral classes préparatoires (ex 1 et 2)

Indications :

Exercice 1, question 2 : Montrer que $\left|\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,dt\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

Exercice 2, question 2 : Faire un changement de variable.

Exercice 3, question 1 : Décomposition en éléments simples

$$\frac{t}{(1+t)(x+yt)^2} = \frac{1}{(x-y)^2}\left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t+x/y}\right) + \frac{x}{y^2(x-y)}\frac{1}{(t+x/y)^2}.$$

Exercice 4, question 2 :

Commencer par étudier la limite quand $b \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+b) - f(t-b)|\,dt$.

Résultats :

Exercice 1 : $D_\Phi =]0,1[$, $\Phi(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x$.

Exercice 2 : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)\pi/2$.