Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2005-2006

Autour du Théorème d'Ascoli.

Soit deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ). Soit $C(X, Y)$ l'espace des applications continues de X dans Y. On suppose que (X,d) est un espace métrique compact. Ainsi on peut munir $C(X, Y)$ de la topologie de la convergence uniforme. Rappelons que si (Y, δ) est complet, alors il en est de même de $C(X, Y)$.

Définition : Soit A une partie de $C(X, Y)$. On dit que A est équicontinue sur X si

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall f \in A,\, \forall (x, y) \in X^2\,;\, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Théorème d'Ascoli : Soit A une partie bornée de $C(X, Y)$. Si A est équicontinue sur X, alors A est relativement compact dans $C(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Rappel : Un sous espace A d'un espace topologique est relativement compact (pour la topologie induite) si son adhérence est compacte.

Exercice 1 (Théorème de Montel)

Dans cet exercice, on n'utilisera pas le théorème d'Ascoli, mais on refera le raisonnement qu'il contient (question 3).

1) a) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Construire une suite (K_n) de compacts telle que $\Omega = \cup K_n$ et pour tout n, $K_n \subset Int(K_{n+1})$. On appelle une telle suite une suite exhaustive de compacts.

b) Montrer que pour tout compact K de Ω, il existe n tel que $K \subset K_n$.

2) a) Pourquoi existe-t'il $\delta_n > 0$ tel que $D(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1}$ pour tout $z \in K_n$.

b) Soit $f \in H(\Omega)$ bornée par M_n sur le compact K_n de Ω. Soit $z', z'' \in K_n$ tels que $|z' - z''| \leq \delta_n$. Montrer que $|f(z') - f(z'')| \leq \frac{M_n}{\delta_n}|z' - z''|$.

c) En déduire que si $\mathcal{F}$ est une famille de $H(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact de Ω, alors pour tout K_n, $\mathcal{F}_{|K_n}$ est équicontinue.

On va maintenant pouvoir montrer le théorème de Montel : Toute famille $\mathcal{F}$ de $H(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact de Ω est normale, c'est-à-dire que toute suite d'élements contient une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de Ω.

3) Soit (f_m) une suite d'élements de $\mathcal{F}$.

a) Soit (z_i) une suite dense dans Ω. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_m) qui converge en tous les points z_i.

b) Montrer que cette suite converge uniformément sur tous les K_n et conclure.

Exercice 2 (Théorème de Cauchy-Péano local)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \qquad (t, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N. \qquad (\mathcal{E})$$

On veut montrer le résultat :
Théorème : On suppose que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel qu'il existe une solution $y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

On a besoin pour prouver ce résultat d'Ascoli et du résultat suivant :
Théorème de Schauder : Soit $\Phi : E \to E$ continue où E est fermée convexe de F espace métrique complet avec $\Phi(E)$ relativement compact dans F. Alors Φ admet au moins un point fixe dans E.

On suppose que les hypothèses de Cauchy-Péano sont vérifiées. Il existe $T > 0$ et $r > 0$ tels que $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r) \subset \Omega$ (Pourquoi ?). Montrer qu'il existe $0 < \alpha \leq T$ tel que si on définit sur $E = C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha], \overline{B}(y_0, r))$ l'application $\Phi(y)$ par $\Phi(y)(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$, alors Φ a un point fixe dans E et conclure que $(\mathcal{E})$ a une solution telle que $y(t_0) = y_0$ sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Exercice 3 (Application du Théorème de Montel)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe a.

1) Montrer que les composées successives de f forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors f est une bijection de Ω dans Ω.

Bibliographie : Chambert-Loir, Rudin et Zuily-Queffélec