

Lemme de Baire : Soit X un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés de X d'intérieurs vides. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide.

On utilise souvent le résultat sous la forme suivante : Soit X un espace métrique complet non vide. Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés tel que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide.

En notant O_n le complémentaire de F_n dans X , on a que si les ouverts O_n sont dense dans X pour tout n , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans X .

Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n.

Alors, ou bien *i*) la famille $(T_i)_{i \in I}$ est uniformément bornée (c'est-à-dire que $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$),

ou bien *ii*) $G = \{x; \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty\}$ est un G_δ dense.

Remarque 1 : Un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Remarque 2 : Une conséquence est que si $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n. et si $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty$, alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$.

Corollaire 1 : Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F où E est un Banach et F un e.v.n. Si $\forall x \in E, T_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x)$, alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème de l'application ouverte : Soient E et F des Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Remarque 3 : Le théorème dit que T transforme tout ouvert de E en un ouvert de F .

Corollaire 2 : Soient E et F des Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Exercice 1 [Dvlpt] (Preuve du Théorème de Banach-Steinhaus)

Utiliser pour cela les ensembles $F_n = \{x \in E; \|T_i(x)\| \leq n, \forall i \in I\}$.

Exercice 2 [Dvlpt] (Preuve du Théorème de l'application ouverte)

1) Commencer par montrer la Remarque 3.

2) Preuve du théorème :

a) En utilisant les ensembles $F_n = \overline{nT(B(0, 1))}$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(0, \delta) \subset \overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))}$.

b) Montrer que $B(0, \delta/2) \subset \overline{T(B(0, 1))}$.

c) On cherche à montrer que $B(0, \delta/4) \subset T(B(0, 1))$ ce qui conclura la preuve. Soit $y \in B(0, \delta/4)$. Commencer par montrer qu'il existe une suite $z^n \in E$ telle que $\|z^n\| < 1/2^n$ et $\|y - T(z^1 + \dots + z^n)\| < \delta/(2^{n+2})$.

3) Montrer le corollaire 2. (Ne pas oublier de montrer la linéarité !)

Bibliographie : Brézis, Chambert-Loir.