Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2005-2006

Régularisation et théorème de Stone-Weierstrass.

On définit la convolution selon $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$.

On appelle suite régularisante une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\geq 0}$ telle que $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$ et pour tout $\alpha > 0$, $\int_{|x|\geq\alpha} \rho_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

On peut dans certaines situations se contenter des hypothèses $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$ et $\mathrm{supp}\rho_n \subset B(0, 1/n)$.

Exercice 1 (Approximation uniforme)

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2 (Stone-Weierstrass pour $N = 1$)

On pose $p_n(x) = \dfrac{1}{a_n}(1-x^2)^n \mathbb{1}_{|x|\leq 1}$ où $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$.

1) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite régularisante.

2) Soit $f \in C([-1/2, 1/2], \mathbb{R})$. Montrer que $f * p_n$ est un polynôme.

3) En déduire que les polynômes sont denses dans $C([a,b], \mathbb{R})$.

Exercice 3 (Stone-Weierstrass pour N quelconque)

On pose $\rho(x) = \pi^{-N/2}e^{-\|x\|^2}$ et $\rho_m(x) = m^N\rho(mx)$. On pose $P_m(x) = \pi^{-N/2}\displaystyle\sum_{j=0}^{m^3-1}\frac{(-1)^j\|x\|^{2j}}{j!}$.
On pose finalement $Q_m(x) = m^N \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} P_m(my)f(x-y)\,dy$.

1) Montrer que $(\rho_n)_{n\geq 0}$ est une suite régularisante.

2) Sur K compact de $\mathbb{R}^N$, montrer que pour m assez grand, on a $m^{N+1}|\rho(my) - P_m(my)| \leq 1$.

3) Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $|Q_m(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}\|f\|_{L^1} + \varepsilon$ pour m assez grand et sur un certain compact.

4) Conclure que les polynômes sont denses dans $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Exercice 4 (Fonctions plateaux)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact dans $[a, b]$ avec $a < b$. Construire à partir de f et de transformations simples (translatées, intégrale, produit, ...) une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vaut 0 pour $x \leq a$ et 1 pour $x \geq b$ et une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vaut 0 pour $x \leq a$ et $x \geq d$ et 1 entre b et c avec $b - a = c - b = d - c$.

Exercice 5 (Démonstration de Stone-Weierstrass pour $N = 1$ avec les probas)

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Soit $f \in C(0,1], \mathbb{R})$ et $f_n(p) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$.

1) Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \delta\right) \leq \dfrac{1}{\delta^2}\mathbb{E}\left[\left(\dfrac{S_n}{n} - p\right)^2\right] \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2) Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3) Conclure en montrant que $f_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$.

Exercice 6 ($C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On admet que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$. Soit $p \in [1, +\infty[$.

1) Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est telle que $\int fu = 0$ pour tout $u \in C_c(\Omega)$. Alors $f = 0$ p.p. sur Ω.

2) Montrer que si $h \in L^{p'}(\Omega)$ est telle que $\int hu = 0$ pour tout $u \in C_c(\Omega)$. Alors $h = 0$ p.p. sur Ω.

3) Conclure que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 7 (Approximation dans L^p)

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Remarque : il y a plein d'autres façons de montrer Stone-Weierstrass, en particulier à l'aide des polynômes de Bernstein, qui s'écrivent, par exemple pour $N = 2$,
$\sum_{0 \le k,l \le n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} C_n^l y^l (1-y)^{n-l} f(k/n, l/n)$.

Bibliographie : Brézis, Chambert-Loir, Gourdon, Zuily-Queffélec.