Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

TD, Année 2005-2006

Equations différentielles.

Exercice 1 (Type Gronwall)

Soit f continue et positive sur $[1, +\infty[$ telle qu'il existe $a, b > 0$ telles que, pour tout $x \geq 1$, on a $f(x) \leq a + b \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt$. Montrer que f est bornée.

Exercice 2 (Stabilité sur des exemples)

1) La solution $x = 0$ est-elle asymptotiquement stable pour le système

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

2) La solution $x = 0$ est-elle stable pour le système

$$x' = \begin{pmatrix} -2 + e^{-t} & -2 \\ 2 & 1 + e^{-3t} \end{pmatrix} x.$$

Exercice 3 (Théorème de stabilité via Lyapounov)

On cherche à prouver la proposition : On suppose qu'il existe une fonction de Lyapounov V définie positive telle que DV soit semi-définie négative. Alors la solution nulle est stable pour $x' = f(t, x)$.

Il existe donc $W(x)$ définie positive telle que $V(t, x) \geq W(x)$ sur S. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x_0\| \leq r$. La solution $x_{T,x_0}(t)$ est définie sur un intervalle maximal $[T, t_{max}[$.

1) On suppose que $t_{max} < +\infty$.

a) Montrer que $V(t, x_{T,x_0}(t)) \leq V(T, x_0)$ pout $T \leq t \leq t_{max}$.

b) Soit $0 < \varepsilon < r$ et $\mu = \min\limits_{\varepsilon \leq \|x\| \leq r} W(x) > 0$. Ecrire la définition de la continuité de $V(T, x)$ au voisinage de $x = 0$ pour obtenir $\|x_{T,x_0}(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [T, t_{max}[$.

2) Conclure.

Exercice 4 (Pendule sans frottement)

Soit l'équation $x'' + \sin x = 0$.

1) En posant $y = x'$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mettre l'équation sous la forme $X' = f(X)$.

2) En cherchant une intégrale première (quantité conservée par les solutions) pour l'équation, obtenir $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x + 1$.

3) Etudier la stabilité de $x = 0$ à l'aide de cette fonction de Lyapounov.

Exercice 5 (Wronskien)

Montrer que le Wronskien $W(t) = \det \Phi(t)$, où Φ est une matrice fondamentale du système linéaire $x'(t) = A(t)x(t)$, vérifie $W'(t) = (\mathrm{Tr} A(t)) \,.\, W(t)$.

Exercice 6 (Equation de Legendre)

On cherche des solutions à variables séparées en coordonnées sphériques pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, plus précisément sous la forme $u(r,\theta,\varphi) = r^k a(\theta) b(\varphi)$. On rappelle que le laplacien en sphérique s'écrit : $\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r u) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta u) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2 u.$

Montrer que b''/b est une constante C et en posant $z = \cos\theta$ et $w(z) = a(\theta)$, montrer que si $C = 0$, alors w vérifie l'équation de Legendre

$$(1-z^2)\,w''(z) - 2z\,w'(z) + k(k+1)\,w(z) = 0.$$