Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
TD, Année 2005-2006
Problèmes d'Extremum.

Exercice 1 (Diagonalisation des endomorphismes symétriques via les Extremas liés)

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. On pose $f(x) = < u(x), x >$.

1) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

2) Soit $S = \{x \in E\,;\ \|x\| = 1\}$. Montrer qu'un maximum e_1 de f sur S vérifie $df(e_1) = \lambda dg(e_1)$ où λ est un scalaire et $g(x) = < x, x > -1$.

3) En déduire l'existence d'un vecteur propre e_1 pour u tel que $< e_1 >^{\perp}$ est stable par u.

4) Conclure.

Exercice 2 (Projection orthogonale)

On cherche à calculer le minimum de la fonction $f(x, y, z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$.

On définit le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$ sur $E = \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que le minimum est atteint en un unique point (a, b, c) tel que $P_0(X) = a\,X^2 + b\,X + c$ vérifie $\|P_0 + X^3\| = \inf\limits_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x, y, z)$ et que ce point est le projeté orthogonal de $-X^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Calculer le projeté orthogonal (on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n\, dt = n!$) et conclure.

Exercice 3 (Principe du maximum faible)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et l'opérateur différentiel définit sur Ω par $Lu(x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial_{x_i}} u(x)$ où $A = (a_{i,j})_{i,j}$ est une matrice symétrique positive telle que $\alpha = \inf\limits_{x\in\Omega} a_{11}(x) > 0$.

1) Soit B une matrice symétrique positive. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

2) Soit $u \in C(\overline{\Omega})$ telle que $Lu > 0$ sur Ω. Montrer que si x_0 est un maximum pour u sur $\overline{\Omega}$ alors ce maximum est sur $\partial\Omega$. (Raisonner par l'absurde.)

3) Soit $u \in C(\overline{\Omega})$ telle que $Lu \geq 0$ sur Ω. Montrer que $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \sup\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$. (Utiliser la fonction $v(x) = u(x) + \mu e^{\lambda x_1}$.)

Exercice 4 (Calcul d'Extremums)

1) Etudier les extremums locaux de $f(x, y) = e^{x \sin y}$ sur $\mathbb{R}^2$ puis sur $[0, 1]^2$.

2) Etudier les extremums locaux de $f(x, y) = xe^y + ye^x$ sur $\mathbb{R}^2$.

3) Etudier les extremums locaux de $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$ sur $]-1/2, 1/2[^2$.

4) Etudier les extremums locaux de $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $]0, +\infty[^2$.

5) (Dimension infinie !) Etudier les extremums locaux de $f((x_n)_n) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(x_n)}{2^n}$ sur l'ensemble des suites réelles de limite nulle muni de la norme infini.

Exercice 5 (Application en géométrie des extremas liés)

On note S le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. On utilise la distance euclidienne. Le but de l'exercice est de trouver pour quels points A, B, C du cercle le périmètre du triangle ABC est maximal.

Pour cela, on fixe A et on note $f(B,C) = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A)$. On définit aussi $\Delta = \{(u,u)\,;\, u \in \mathbb{R}^2\}$ et $U = ((\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{A\})) \setminus \Delta$.

1) Montrer l'existence d'une solution pour le problème.

2) En appliquant les extremas liés, montrer qu'il existe (λ, μ) tels que $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \lambda \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \mu \dfrac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$.

3) Conclure à la nature de ABC.