Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Séance de TD, Année 2005-2006

Intégrales Généralisées

Exercice 1 [cours] (Série de Riemann)

Redémontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 2 (Convergence et calcul)

Convergence et calcul éventuel des intégrales généralisées suivantes :

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt,\ b)\ \int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt,\ c)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t-3}\,dt,\ d)\ \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt,\ e)\ \int_0^1 \ln t\,dt.$$

Exercice 3 (Convergences)

Convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$f)\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,dt,\ g)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}t-\cos t}{t^{5/2}}\,dt,\ h)\ \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}\,dt,\ i)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt,$$

$$j)\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt,\ k)\ \int_0^{+\infty} t\cos(t^3)\,dt,\ l)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt,\ m)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{ch}t\sin^2 t}\,dt.$$

Pour le $m)$, on posera $\displaystyle u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+\mathrm{ch}t\sin^2 t}\,dt$, et on montrera que $\displaystyle u_n \le \pi^2 e^{-n\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\pi^2 e^{-n\pi}/2+t^2}\,dt$.

Exercice 4 (Semi-convergence)

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge. Montrer la convergence pour tout $a > 0$ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\,dt$.

Exercice 5 (Intégrale généralisée “double”)

On cherche à étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx$. On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

a) Montrer l'existence de $f(x)$ pour $x \ge 0$ puis que $f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ et en déduire la locale intégrabilité de f sur $[0,+\infty[$.

b) Etablir la relation $\displaystyle f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\,dt$ pour $x > 0$ et conclure.

Exercice 6 (Un contre-exemple)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant L pour limite en $+\infty$ et l en $-\infty$. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1)-f(t))\,dt$.

Exercice 7 (Interpolation de normes L^2)

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Montrer que si f et f'' sont de carré intégrable, alors f' est de carré intégrable. Montrer de plus que $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f'^2\right)^2 \le \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)\left(\int_0^{+\infty} f''^2\right)$.

Bibliographie :

- Gourdon
- Précis d'analyse-géométrie, tome 7
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4
- Exercices personnels