Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

TD, Année 2005-2006

Permutation de limites.

On a déjà rencontré un certain nombre de situations qui sont des permutations de limites (Transformée de Laplace, Th. d'Abel, d'Hardy-Littlewood, Formule de Poisson,...) On va en étudier quelques autres ici.

Exercice 1 (Théorème de Schwarz)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ telle que f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Ω et qui sont continues en un point (x_0, y_0) de Ω. On veut montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

1) Préciser en quoi il s'agit d'un problème de permutation de limites.

2) On pose $\Delta(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)$.

a) En considérant $\varphi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$, montrer qu'il existe $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ tels que $\Delta(h,k) = hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$.

b) Montrer de façon analogue qu'il existe $\theta_3, \theta_4 \in [0,1]$ tels que $\Delta(h,k) = hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$.

3) Conclure.

Exercice 2 (Contre-exemples)

1) Donner un exemple d'une suite $(u^p)_{p \geq 1}$ de suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{p \to +\infty} u^p(n) \neq \lim\limits_{p \to +\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} u^p(n)$.

2) Donner un exemple d'une suite réelle double $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_p \sum\limits_n u_{n,p} \neq \sum\limits_n \sum\limits_p u_{n,p}$.

3) Donner un exemple d'une suite de fonctions positives, continues et intégrables sur $[0, +\infty[$, $(f_n)_n$ qui converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers 0 et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \neq \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X f_n(t)\, dt \neq \lim\limits_{X \to +\infty} \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^X f_n(t)\, dt$.

Exercice 3 (Séries doubles)

On va donner une preuve élémentaire du cas particulier du théorème de Fubini suivant : Soit une suite complexe double $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{p,n} |u_{n,p}|$ converge, alors $\sum\limits_p \sum\limits_n u_{n,p}$ et $\sum\limits_n \sum\limits_p u_{n,p}$ convergent et ont même somme.

1) Commencer par le cas où $u_{m,n}$ est positive et majorer les sommes partielles.

2) Traiter le cas général.

Exercice 4 (Avec la CVN)

On cherche à montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t} \ln(1-t)\, dt = \zeta(3) \left(= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \right)$.

1) Soit $a \in [0, 1[$. Montrer que $\sum \dfrac{t^{n+1} \ln t}{n+1}$ converge normalement sur $[0, a]$.

2) Montrer que le série $\sum \ln a \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)^3}$ converge normalement sur $[0,1]$.

3) Montrer que $\Phi : a \mapsto \sum_{n\geq 1} \int_0^a \dfrac{t^n \ln t}{n+1}\, dt$ est continue sur $[0,1]$.

4) Conclure.

Exercice 5 (Sous-espace fermé)

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes muni de la norme infini.

1) Montrer que $F = \{x \in E\,;\ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ est un sous-espace fermé de E.

2) En quoi s'agit-il d'une permutation de limites ?

Exercice 6 (Théorème de la double limite)

Le théorème de la double limite permet de faire l'intervertion suivante : $\lim_{x\to a, x\in X} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a, x\in X} f_n(x)$. Il s'énonce précisément sous la forme :

Soit X une partie de $\mathbb{K}$, $a \in \overline{X}$, F un Banach et $f_n : X \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur X et que pour tout n, $\lim_{x\to a, x\in X} f_n(x) = l_n$ existe. Alors (l_n) converge et notant l sa limite, on a $\lim_{x\to a, x\in X} f(x) = l$.

Exercice 7 (Avec la CV Dominée)

1) Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |e^{-nt} \sin at|\, dt < +\infty$

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ pour tout $a > 0$.