Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 203, Année 2005-2006

Utilisation de la notion de compacité.

Remarques sur la leçon

Bien entendu, les théorèmes de compacité eux-même ne doivent pas apparaitre dans le plan, mais ils doivent sous-tendre l'enchainement des parties. On regroupera ainsi les applications utilisant
1) Origine topo :
Borel-Lebesgue (Dini avec une suite croissante, idéaux max de $C(\text{compact}, \mathbb{R})$,...),
Continue sur compact atteint ses bornes (Th de Rolle, pt fixe avec $d(fx, fy) < d(x, y)$, poly meilleur approx, Riesz, équivalence des normes, compact en dim finie sont les fermés, bornées, GL_n iso à $O(n) \times S_n^{++}$, d'Alembert-Gauss,...),
2) Origine métrique :
Bolzano-Weiertrass ($\|u_{n+1} - u_n| \to 0$ + Jacobi, Pt fixe pour 1-lipschitz,...),
Heine (Continuié intégrale à paramètre, poly de Bernstein et Th de Weierstrass, Dini avec des fonctions croissantes, Th de Sard,...),
3) Origine Fonctionnelle :
Th d'Ascoli (Arzela-Péano, Montel, Op. compacts et à Noyau,...),
Stone-Weiertrass,
Kakutani (et existence des mesures de Haar),
Banach-Alaoglu.

Bien sur, il faut faire des choix parmi tout ceci (en particulier dans le 3) et le choix des développements est très vaste...

Exercice 1 (Base d'Auerbach)

Soit E un e.v.n. de dim finie sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base normée dont la base duale est normée. (Considérer avec $\mathcal{B}$ une base fixée, l'application $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)|$ sur la sphère unité et un point vérifiant le maximum).

Exercice 2 (Opérateur à noyau)

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la convergence uniforme. Soit $K \in C([0, 1]^2, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy$.

1) Montrer que T_K est une application linéaire continue de E dans E. Calculer sa norme.

2) Montrer que T_K est un opérateur compact de E dans E.

3) Montrer que $\{f \in E\,;\, \forall x,\ f(x) + \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy = 0\}$ est un s.e.v. de dimension finie de E.

Exercice 3 (Autre exercice de type Oral)

Soit E un e.v.n. et $a, b \in E$. Soit $f(t) = \|at + b\|$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f atteint ses bornes. Pour la norme euclidienne, en quels points ? Exemple où non unicité ?