Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 204, Année 2005-2006

Connexité. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Le plan doit impérativement comprendre la définition (!), les propriétés de base, les connexes de $\mathbb{R}$, la définition des composantes connexes, de la notion de connexité par arc, les exemples sur les "grands" groupes (livre de Mneinmé-Testard, $SL_n(\mathbb{K}), GL_n(\mathbb{C}), GL_N^+(\mathbb{R}), GL_N^-(\mathbb{R}), SO(n), U(n), SU(n), ...$ qui sont connexes par arcs, ceux aussi qui ne le sont pas (bien comprendre pourquoi il y a des différences entre certains groupes sur $\mathbb{R}$ et ceux sur $\mathbb{C}$), le théorème des valeurs intermédiaires, Darboux, Sunyer y Balaguer, $df = 0$ implique $f =$cste sur connexe, le prolongement analytique et les zéros isolés,....

A propos de l'exemple ultra-classique : si (u_n) est une suite d'un compact tel que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence est un connexe. Une application à connaitre : la méthode de Jacobi (cf analyse numérique matriciel).

Ne pas faire une leçon très théorique sur la connexité avec peu d'exemples. Mieux vaut mettre seulement les résultats utiles et beaucoup d'exemples et d'applications.

A propos des exemples, penser aussi au cube de Hilbert et la cage infini (Chambert-Loir).

Ne pas oublier les applications simples, comme par exemple que la connexité permet de voir que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

En plus de votre livre de topo préféré, utiliser les grands classiques (Pommellet, Gourdon,...)

Un résultat (délicat mais très joli pour montrer la force de la connexité, à vous de voir...) issu du Zuily-Queffélec est de montrer d'existence d'une solution de $-u'' + qu = f$ avec les conditions de bord $u(a) = 0$ et $u(b) = 0$ dans l'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(]a, b[)$ pour $\alpha \in]0, 1]$, $q, f \in C^{0,\alpha}(]a, b[)$ et q positif. Pour cela, on montre que l'ensemble $A = \{t \in [0, 1], -u'' + tqu = f$ avec $u(a) = u(b) = 0$ admet une solution $u \in C^{2,\alpha}(]a, b[)\}$ est non vide (il contient 0), ouvert et fermé dans $[0, 1]$ donc par connexité $A = [0, 1]$ et donc $1 \in A$ ce qui donne une solution. Si vous choisissez de le proposer en développement, il faut l'avoir bien préparé car c'est trop long si on veut tout montrer, donc il faut savoir ce que l'on va admettre à l'avance.

Au niveau des contre-exemples : l'adhérence du graphe de $\sin(1/x)$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 1 [Dvlpt] ($d(u_n, u_{n+1}) \to 0$ et Jacobi)

Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_n$ une suite de E telle que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. On va montrer que $\Gamma = \{$valeurs adhérence de la suite $(u_n)_n\}$ est connexe.

1) On pose $A_p = \{u_n\,;\, n \geq p\}$. Lien entre Γ et les A_p ? En déduire que Γ est compact.

2) On suppose que $\Gamma = A \cup B$ où A et B sont deux fermés, non vides et disjoints. On pose $\alpha = d(A, B)$. Montrer que $\alpha > 0$.

3) On pose $A' = \{x \in E\,;\, d(x, A) < \alpha/3\}$ et $B' = \{x \in E\,;\, d(x, B) < \alpha/3\}$ et $K = E \backslash (A' \cup B')$. Montrer que K est compact.

4) On va montrer que $(u_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans K. Par hypothèse, il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$, $d(u_n, u_{n+1}) < \alpha/3$. On prend un $x_0 \in A$ et un $y_0 \in B$. En utilisant des points de la suite qui approche ces valeurs d'adhérences, construire une suite à valeur dans K et conclure. (Cf Gourdon).

5) Application à la méthode de Jacobi pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres : Rappel : Pour A symétrique, donc diagonalisable $O^t\, A\, O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec O orthogonale,

on considère des matrices de la forme $\Omega_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où les termes en θ sont aux lignes et colonnes p et q. Si $A_{pq} \neq 0$, il existe un unique $\theta \in]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4[$ tel que $A' = \Omega_{pq}^t \, A \, \Omega_{pq}$ vérifie $B_{pq} = 0$. On chaque étape de l'algorythme, on choisit un p et q tels que $|A_{pq}^k| = \max_{i \neq j} |A_{ij}^k|$ et on fait $A^{k+1} = O_k^t \, A^k \, O_k$ en posant $O_k = \Omega_{pq}$ pour ce choix de p et q (qui varie à chaque étape k).

On montre alors la convergence des valeurs propres, c-à-d que A_k a pour limite $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ avec σ une permutation. Pour cela, on montre que posant $A_k = D_k + B_k$ avec D_k la partie diagonale de A_k. On montre que $B_k \to 0$, que (D_k) n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences puis que $D_{k+1} - D_k \to 0$. Puis pour la convergence des vecteurs propres, en supposant en plus que les valeurs propres sont distinctes, on montre que la suite (O_k) n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences puis que $O_{k+1} - O_k \to 0$. (Cf Ciarlet p 114 à 117).

Remarque : ce développement va dans d'autres leçons.

Exercice 2 (Quelques exemples)

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, que $SO(n)$ est connexe par arcs.

Exercice 3 (Exercices type Oral)

1) Montrer que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ est connexe, compact, connexe par arcs.

2) Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue, alors f n'est pas injective. (Utiliser $g(z) = f(z) - f(-z)$.)

3) Théorème de passage des douanes : Dans E espace topologique, $A \subset E$, C connexe de E, $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. Alors $C \cap \mathrm{Fr}A \neq \emptyset$.

4) Montrer que $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

5) Montrer le théorème de Darboux (soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable où I est un $\mathbb{R}$, alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires) en utilisant les fonctions $\varphi(t) = \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$ et $\psi(t) = \dfrac{f(y) - f(t)}{y - t}$ pour $x < y \in I$.