Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 237, Année 2005-2006

Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarques sur la leçon

Il faut parler des différentes façons de converger/diverger. Par exemple, la semi-convergence ($\int \sin x/x\, dx$, ...), le comportement à l'infini, la continuité uniforme,...

La comparaison série-intégrale donne aussi des résultats selon les cas de convergence ou de divergence. (f décroissante et positive donne $\int_0^\infty f$ converge si et seulement si $\sum f(n)$ converge. Si $\sum f(n)$ diverge, alors $\sum_{0\le k\le n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f$, ...)

Une partie du plan est le lien entre les différentes façons de converger :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad x \to +\infty, \qquad \text{Convergence (classique)},$$

$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x F(t)\, dt, \qquad x \to +\infty, \qquad \text{Convergence au sens de Cesaro},$$

$$H(a) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}\, dt, \qquad a > 0,\, a \to 0, \qquad \text{Convergence au sens d'Abel},$$

voir exercice 1.

Sinon, il faut mettre vos exemples favoris (non triviaux).

Il est bien de parler de situations dont la résolution se rapporte à la convergence ou la divergence d'une intégrale, par exemple l'existence de fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier via le théorème de Banach-Steinhauss utilise le fait que $\int_1^{+\infty} |\sin x/x|\, dx$ diverge.

Une autre situation intéressante est le temps d'existence des équations différentielles. Pour $x' = f(t,x)$ sur $[t_0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ avec f continue et telle que pour tout $a > t_0$, il existe F telle que $|f(t,x)| \le F(|x|)$ sur $[t_0,a]\times\mathbb{R}^n$ avec $\int^{+\infty}\frac{1}{F} = +\infty$, alors toute solution maximale est globale. Pour l'équation autonome $x' = F(x)$ avec $n = 1$, $F > 0$, de classe C^1 et telle que $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{F} < +\infty$, alors la solution maximale associée à $x(t_0) = x_0$ est définie sur $]t_0 - \int_{-\infty}^{x_0}\frac{1}{F}, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty}\frac{1}{F}[$. (Cf Zuily-Queffélec).

Exercice 1 (Lien entre les différentes convergences)

Soit f continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

1) Montrer que si $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, alors $G(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

2) a) Montrer que $G(x) = \int_0^x (1-\frac{t}{x})f(t)\, dt$.

b) Calculer $\int_\tau^{+\infty}(u-t)e^{-au}\, du = \frac{1}{a^2}e^{-a\tau} + \frac{\tau-t}{a}e^{-a\tau}$.

c) Montrer que $a^2\int_0^T\int_t^{+\infty} f(t)(u-t)e^{-au}\, du\, dt = \int_0^T f(t)e^{-at}\, dt$.

d) Montrer que $\int_0^T\int_t^{+\infty} f(t)(u-t)e^{-au}\, du\, dt - \int_0^T\int_t^T f(t)(u-t)e^{-au}\, du\, dt \underset{T\to+\infty}{\to} 0$.

e) Obtenir que $H(a) = a^2\int_0^{+\infty} uG(u)e^{-au}\, du$ et conclure que si $G(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ alors $H(a) \underset{a\to0^+}{\to} 0$.

Exercice 2 (Exercice type Oral)

Trouver $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ telle que $I = \int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/x} - a - \frac{b}{x}\right] dx$ converge.