Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 215, Année 2005-2006

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Il faut définir proprement la différentiabilité, et donner de nombreux exemples. Les grands classiques :

Forme bilinéaire $d\Phi(a,b).(h.k) = \Phi(a,k) + \Phi(h,b)$,

D'où par récurrence, pour $f(M) = M^p$ sur les matrices, $df(M).H = \sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}$,

Dans un Banach E, la différentielle de $g(x) = x^{-1}$ sur $\mathcal{G}l_c(E)$, $(x+h)^{-1} = (x(\mathbb{1} + x^{-1}h))^{-1} = (\mathbb{1} + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} = (\mathbb{1} - x^{-1}h + o(h))x^{-1} = x^{-1} - x^{-1}hx^{-1} + o(h)$, d'où $dg(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$. (On utilise que dans un Banach, $(\mathbb{1} + a)^{-1} = \sum(-1)^k a^k$.)

Il faut définir la dérivée suivant un vecteur et les dérivées partielles, les liens avec la différentiabilité et les contre-exemples associés (par exemple $f(x,y) = x^2\mathbb{1}_{x\in\mathbb{Q}} + y^2\mathbb{1}_{y\in\mathbb{Q}}$ est différentiable, mais n'a pas de dérivée partielle, $g(x,y) = \mathbb{1}_{y=x^2, x\neq 0}$ a des dérivées suivant toutes les directions au voisinage de $(0,0)$, mais n'est même pas continue en $(0,0)$, ...)

Il faut aussi donner un exemple qui se calcule à l'aide des dérivées partielles, par exemple le déterminant sur les matrices, $d\det(M).H = \mathrm{Tr}(\tilde{M}^t.H)$ où $\tilde{M}$ est la commatrice de M. (Notant E_{ij} la base canonique des matrices d'ordre n, $\det(M + tE_{ij}) = \det M + t\tilde{M}_{ij}$ et donc $\frac{\partial}{\partial E_{ij}} \det M = \tilde{M}_{ij}$, d'où $d\det(M).H = \sum_{ij} \tilde{M}_{ij}H_{ij} = \sum_{ij} \tilde{M}^t_{ji}H_{ij} = \mathrm{Tr}(\tilde{M}^t.H)$. On peut utiliser $M\tilde{M}^t = \det(M)Id$ pour réecrire le résultat).

Remarque : La leçon se place en dimension finie, donc bien dire que la continuité de la diffŕentielle est automatique et que le choix de la norme n'est pas importante dans la définition de la différentielle.

On n'oubliera pas les accroissements finis, le théorème de Schwarz (voir fiche intervertion de limites), les points critiques ($r = s = 0$) et les conditions d'ordre 2 (condition nécessaire extremum (hessienne positive/négative), condition suffisante (hessienne définie positive/négative).

Remarque : Il faut savoir faire des choses "concrètes", pas exemple écrire Taylor à l'ordre 2, à 2 variables.

La notion de difféomorphisme fera apparaître les énoncés suivants : changement de variables, inversion locale/globale.

On parlera aussi du théorème de Sard (l'image de l'ensemble des points singuliers d'une application C^1 sur $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle, voir Chambert-Loir, tome 3, version simple de Sard) et du théorème de la boule de billard chevelue (exercice 1).

Pour les développements, beaucoup de choses possibles, par exemple : Théorème de Schwarz + ?, Théorème de Sard, Boule Billard Chevelue, Inversion locale, ...

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Chambert-Loir 3
- Gourdon (!)
- Hauchecorne
- Leichtman, Schauer
- Objectif Agreg
- Pommellet
- Précis
- Ramis
- Rouvière

Exercice 1 (Boule de billard Chevelue)

1) On commence par montrer le lemme de Milnor.

Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$, $v : A \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur un voisinage de A. On pose $F_t = Id + tv$ pour $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|t| < \varepsilon$, alors pour tout $x \in A$, $dF_t(x)$ est inversible.

b) Montrer que si $|t| < \varepsilon$, alors F_t est un C^∞-difféomorphisme de A sur $F_t(A)$.

c) Montrer que $\det(dF_t(x))$ est > 0 sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times A$.

d) On note λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $t \mapsto \lambda(F_t(A))$ est un polynôme sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de degré $\leq n$.

2) On passe maintenant au théorème proprement dit : Il existe un champ continue de vecteurs unitaires tangents sur la sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ continue si et seulement si n est pair.

Remarque : Comme on peut toujours approcher un champ continue de vecteur par un champ de vecteurs C^1, il suffit de montrer le résultat : Il existe un champ de classe C^1 de vecteurs unitaires tangents sur la sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 si et seulement si n est pair.

a) Si $n = 2m$, donner un tel champ de vecteurs. Le représenter pour $n = 2$.

b) Soit $v : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur unitaire tangent à la sphère et de classe C^1. On le prolonge à $\mathbb{R}^n$ suivant $v(x) = \|x\| v(x/\|x\|)$. Montrer que pour t petit, F_t est une bijection de S^{n-1} sur la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{1+t^2}$. En déduire, en prenant pour A la couronne $\|x\| \in [a, b]$, que n est pair.

3) Déduire du théorème qu'en dimension impaire, tout champ de vecteurs continue tangent sur la sphère s'annule. (Et donc une boule de Billard "chevelue"a toujours en épis.)

Exercice 2 (Exercices type Oral)

1) L'inversion : Calculer la différentielle de $\mathrm{Inv}(x) = x/\|x\|^2$ et reconnaître la similitude obtenue.

2) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

3) Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (a, b) \in \Omega^2, |f(b) - f(a)| \leq \| a - b \|^2$. Montrer que f est constante sur Ω.

4) On pose $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.