Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 205, Année 2005-2006

Espaces complets. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Tout d'abord bien comprendre la notion d'espace complet : c'est une notion métrique et non topologique (cf ex 2). L'idée des espaces complets est d'avoir la convergence sans avoir la limite.

Pour montrer qu'un espace est complet. On part d'une suite de Cauchy. Ensuite, il faut respecter les trois étapes suivantes :
1) Définir ce qui va être la limite.
2) Montrer que cet élément appartient à l'ensemble.
3) Montrer la convergence (pour la bonne distance) de la suite vers la limite.

Exemple : Pour montrer que $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ muni de $\|.\|_\infty$ est complet :

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans E : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n, m \geq N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

1) A x fixé, comme $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, on en déduit que $(f_n(x))_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complet. On note $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_n$ dans $\mathbb{C}$.

2) Pour $\varepsilon = 1$, on a $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ pour $n, m \geq N_1$. En faisant $m \to +\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ pour $n \geq N_1$. Et donc $|f(x)| \leq \|f_{N_1}\|_\infty + 1$ et donc $f \in E$.

3) En faisant $m \to +\infty$ dans $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n, m \geq N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Ce qui veut dire que f est la limite de $(f_n)_n$ dans E.

Les exemples d'espaces complets à mettre impérativement dans le plan (et à savoir étudier) sont les suivants : $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ muni de $\|.\|_\infty$, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme d'opérateur pour F complet, $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $L^p(X)$ munis de leur normes habituelles. Mais il faut en mettre d'autres. Par exemple les exercices 2, 3 et 4.

On peut axer le plan suivant les aspects 1) métriques, 2) normes ($->$ Banach) et 3) produits scalaires ($->$ Hilbert).

Pour les applications, on parlera du théorème du point fixe contractant, de Cauchy-Lipschitz, des fonctions implicites, des applications de Baire (Banach-Steinhauss, Application Ouverte, ...), de Lax-Milgram/Stampacchia, du théorème de projection sur un convexe fermé dans un hilbert, de la résolution d'équations intégrales (par exemple l'existence et l'unicité dans $C([a, b])$ de f solution de $f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy$, équation de Fredholm, cf livre de Kolmogorov par exemple), ...

A propos des applications du lemme de Baire (et du fait que $\mathbb{R}$ est complet), il y en a un certain nombre à connaître (cf Zuily-Queffélec) :
1) La non-existence d'une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (alors qu'il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$), ceci utilise que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction est un G_δ,
2) Que si $f_n \in C(\Omega, \mathbb{C})$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ converge simplement vers f, alors f est continue sur un ensemble "gras", c-à-d qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses, (Une conséquence de ceci est que si f est dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est continue sur un ensemble dense),
3) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et dérivable en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans $C([0, 1])$.
On peut aussi donner le théorème de Sunyer-y-Balaguer qui dit que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ et est telle que pour tout x, il existe n (qui dépend de x) tel que $f^{(n)}(x) = 0$, alors f est un polynôme. (Il existe aussi une version de ce résultat avec les intégrales itérées).

A propos de Lax-Milgram, il faut connaitre au moins une application, par exemple le problème de Sturn-Liouville et l'existence d'une solution C^2 à l'équation $-(pu')' + qu = f$ dans $]0, 1[$ avec $u(0) = u(1) = 0$ pour $p \in C^1([0, 1])$, $q, f \in C([0, 1])$ avec $p(x) \geq \alpha > 0$ pour $x \in [0, 1]$, et $q \geq 0$. On obtient par Lax-Milgram une solution du problème variationnel $\int pu'v' + \int quv = \int fv$ pour tout $v \in H_0^1(]0, 1[)$, puis on montre que la solution dans $H_0^1(]0, 1[)$ est en fait dans C^2.

(Cf Brézis) Cet exemple illustre aussi l'intérêt du complété d'un espace (et est donc important !) : on pose le problème dans un espace plus grand qui est complet. La notion de complétude donne l'existence d'une solution à notre problème. Ensuite, on montre (parfois) que l'élément ainsi construit appartient à l'ensemble de départ. (Exemple utile aussi dans la leçon sur les exemples d'équa diff.)

A propos du théorème de projection sur un convexe, on donnera des applications du style $f(x,y,z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$ est minimale en $(-9, 18, -6)$. (Exemple utile aussi dans la leçon sur les problèmes d'extremum, voir la feuille d'exercices sur ce thème.)

On peut par exemple proposer les développements suivants (un par partie) :
Th de prolongement des u-continue + Intégrale de Riemann pour fonctions réglées.
Th de l'application ouverte.
Th de projection sur un convexe fermé.

Exercice 1 [Dvlpt] (Théorème de prolongement des applications uniformément continues)

Soit (E,d) et (F,δ) des espaces métriques. Soit A une partie dense de E. On suppose que (F,δ) est complet. Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue. On veut montrer qu'il existe une unique application $g : E \to F$ continue telle que $g|_A = f$. De plus g est une application uniformément continue sur E.

1) Soit $x \in E \setminus A$ et $(a_n)_n$ une suite de A qui converge vers x. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ existe. Montrer que la limite ne dépend pas de la suite $(a_n)_n$ choisie.

2) On pose $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = \lim\limits_{a\to x,\, a\in A} f(a)$ si $x \in E \setminus A$. Montrer que g est uniformément continue sur E.

3) Montrer l'unicité.

4) Application : On suppose que les fonctions réglées sont limites uniformes de fonctions en escalier. Définir l'intégrale de Riemann pour les fonctions en escalier, puis l'étendre au cas des fonctions réglées.

Exercice 2 (Notion métrique)

Pour $E =]0,1]$, on utilise $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

1) En utilisant $f(x) = 1/x$, montrer que ces deux distances définissent la même topologie.

2) En utilisant la suite $u_n = 1/n$, montrer que (E, d_1) n'est pas complet.

3) Montrer que (E, d_2) est complet.

Exercice 3 (Espaces de Hölder)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\alpha \in]0,1]$.
On définit $C^{0,\alpha}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\,;\ f \in L^\infty(\Omega)$ et $\exists C$ tel que $\forall x,y \in \Omega, |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha\}$ muni de $\|f\|_\alpha = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup\limits_{x\neq y} \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{|x-y|^\alpha}\right|$. Montrer que $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|.\|_\alpha)$ est complet.

Exercice 4 (Petits exercices d'Oral)

1) Les espaces suivants sont-ils complets ?
a) L'espace des suites complexes et stationnaires muni de la norme infini.
b) L'espace des suites complexes qui tendent vers 0 muni de la norme infini.
c) L'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme 1.

2) a) Montrer que $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R})\,;\ t \mapsto tf(t)$ est bornée sur $]0,1[\}$ muni de $N(f) = \sup\limits_{0<t<1} |tf(t)|$ est un Banach.

b) Montrer l'existence dans E de f solution de $6f(t) = f(t/2) + f(t/3)$.

Bibliographie générale : toujours les mêmes + votre livre de topologie préféré.
Bibliographie des exercices 2 et 3 : Hauchecorne, Zuily-Queffélec.