Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 222, Année 2005-2006

Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

Remarques sur la leçon

Un plan "classique" est le suivant :
I. Solutions exactes
Parler du cas linéaire, des résolutions classiques (variables séparées, intégrale premiere, homogène, Bernoulli, Ricatti, Lagrange, Clairaut, incomplète du second ordre). Solutions DSE, Equation de Bessel,...
Il faut également donner des exemples de propriétés des solutions des équations. Par exemple pour le second ordre (ex 1), ou des exemples comme Van der Pol,...
II. Résolution approchée
Schéma numérique à un pas, Consistant et Stable implique Convergent, CNS de consistance, CS de stabilité, Ordre Méthode d'Euler, Taylor d'ordre p, point milieu, ...
Bien montrer l'approximation entre les solutions exactes et approchées selon l'ordre.
III. Applications
1. EDP qui se ramènent à des EDO (au moins : transport et chaleur)
2. Calculs divers
3. Problèmes concrets

1) Il faut des exemples qui illustre des phénomenes du style a) l'existence d'une infinité de solutions dans le cas d'une fonction continue mais pas localement lipschitzienne, b) la non-existence de solutions dans le cas continue mais en dimension infinie (Feuille de Panorama Equa diff ou Zuily-Queffélec)

2) Pour les schémas numériques, on se limitera aux méthodes à un pas, mais on parlera des schémas explicites et aussi implicites. Pour les implicites, voir le Schatzmann.

3) On donnera l'exemple du Demailly p 219 pour $y' = 3y - 1$ avec $y(0) = 1/3$, on trouve $y(10) = 10 + 1/3$ et avec $y(0) = 1/3 + \varepsilon$, on trouve $y(10) = 10 + 1/3 + \varepsilon e^{30}$, l'écart est en $10^{13}\varepsilon$. Le problème est mathématiquement bien posé, mais numériquement mal posé, car si ε est la précision machine, disons 10^{-10}, on a une erreur possible de 1000 sur un résultat de 10+1/3...

3) Sur les caractéristiques, voir par exemple le Evans, PDE p94 On cherche à résoudre $\partial_t u(t,x) + a(t,x)\partial_x u(t,x) = f(t,x)$. Soit $X(t,x)$ la solution de $dX/dt = a(t,X)$ avec la condition $X(0,x) = x$ (ou $X(T,x) = x$). Alors $\partial_t u(t,X(t,x)) + a(t,X(t,x))\partial_x u(t,X(t,x)) = f(t,X(t,x))$ devient $\frac{d}{dt}u(t,X(t,x)) = f(t,X(t,x))$ et par intégration entre 0 et t, on a $u(t,X(t,x)) = u^0(X(0,x)) + \int_0^t f(s,X(s,x))\,ds$. Avec $X(0,x) = x$, on trouve $u(t,X(t,x)) = u^0(x) + \int_0^t f(s,X(s,x))\,ds$ et on pose $y = X(t,x)$ et on calcule $x = Y(t,y)$ de façon à avoir $u(t,y) = u^0(Y(t,y)) + \int_0^t f(s,X(s,Y(t,y)))\,ds$. Avec $X(T,x) = x$, on trouve $u(t,x) = u^0(X(0,x)) + \int_0^t f(s,X(s,x))\,ds$. Les deux techniques peuvent être utiles.

4) Sur Fourier, voir le livre Evans p188, $\partial_t u - \Delta u = 0$ avec une condition initiale, devient par Fourier en x notee $F(u(t,y))$: $\partial_t F(u) + |y|^2 F(u) = 0$ qui se résout en $F(u) = F\left(u^0 e^{-t|y|^2}\right)$. Et donc $u(t,x) =$ formule explicite en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier. Remarque : ceci nécessite de savoir calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne, calcul qui se fait aussi par exemple à l'aide d'une équa diff.

5) Un bon exemple pour enrichir la partie sur les résolutions classiques est $f'(t) = f(1/t)$, Gourdon p 359. f est alors solution de $t^2 y'' + y = 0$, équation de type Euler.

6) Théorie de Sturn-Liouville. Equation d'ordre 2, ex 3 p 369 Gourdon qui peut faire un développement. Il y a aussi des points là dessus dans Chambert-Loir 3 à partir de la page 144.

7) Pour les applications, voila quelques idées :

Calcul d'intégrales, Gourdon p 165

Calcul du nombre d'involution de $\{1, ..., n\}$ (Leichtmann-Schauer tome 3 p 103).

Les problèmes provenant de quelque chose de concret: Il y a de bons exemples dans le Chambert-Loir. En particulier, il y a le célèbre systeme proie-prédateur, mais aussi le modèle d'épidemie. Pour le Pendule, voir p72 Leichtmann-Schauer tome 4. Pour la chainette, voir le Demailly p175.

8) L'exercice p100 dans Chambert-loir sur le comportement d'une solution approchée au voisinage d'un "point d'explosion" est bien dans l'esprit de la leçon.

Pour les développements, par exemple : second ordre (ex 1), système proie-prédateur, CNS de consistance et CS de stabilité.

Remarque : il est indispensable de connaitre la preuve de ces deux dernières conditions qui ne sont pas compliquées et qui peuvent rapporter gros. La première utilise la continuité uniforme (très bon effet dans la leçon correspondante !) et les sommes de Riemann. La seconde une version discrète du lemme de Gronwall (en fait, c'est un terme pompeux pour désigner une récurrence sur une suite très simple). Voir le Demailly p212 et 213 pour les preuves.

Exercice 1 [Dvlpt] (Théorème de Sturn d'oscillation et de comparaison)

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire (L_{pq}) $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec p et q deux fonctions continues de I (intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer qu'une solution non nulle de (L_{pq}) n'a qu'un nombre fini de zéro dans tout compact de I.

2) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (L_{pq}) qui forment une base de solutions. Montrer qu'entre deux zéros t_1 et t_2 consécutifs de y_1, il existe un unique zéro $t_0 \in]t_1, t_2[$ pour y_2. (On utilisera le Wronskien).

3) Pour $q \leq 0$, montrer qu'une solution non identiquement nulle de (L_{0q}) s'annule au plus une fois sur I.

4) Soit y_1 une solution de (L_{0q}) et y_2 une solution de (L_{0r}) avec $q \leq r$. Montrer qu'entre deux zéros de y_1, y_2 s'annule au moins une fois dans $[t_1, t_2]$. De plus, si y_1 et y_2 ne sont pas proportionnelles, alors le zéro appartient à $]t_1, t_2[$.

5) Si $q(t) \leq \mu^2$ avec $\mu > 0$, montrer que deux zéros consécutifs t_2 et t_1 d'une solution non nulle y de (L_{0q}) vérifient $t_2 - t_1 \geq \pi/\mu$.

6) Si $q(t) \geq \mu^2$ avec $\mu > 0$, montrer que toute solution non nulle y de (L_{0q}) s'annule au moins une fois sur tout intervalle fermé de longueur π/μ.

Exercice 2 (Exercices type oral)

1) Rśesoudre $y' = ay + 2e^t\sqrt{y}$ avec a un réel.

2) Résoudre $x\partial_x u + 2y\partial_y u + \partial_z u = 3u$ avec la condition $u(x, y, 0) = g(x, y)$ pour g de classe C^1.

3) Montrer que la méthode du point milieu est d'ordre 2. Rappel : $y_{n+1} = y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n)$ avec $\Phi(t, y, h) = f(t + h/2, y + f(t, y)\, h/2)$.

Exercice 3 (Equation de van der Pol)

On s'intéresse à l'équation différentielle $x'' + \mu(x2 - 1)x' + x = 0$ avec $\mu > 0$.

1) Posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) = x'(t) + F(x(t)) \end{pmatrix}$ pour un bon choix de F, montrer que l'équation différentielle se met sous la forme $X'(t) = f(X(t))$ avec f vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

2) Quels sont les points critiques du système obtenu ?

3) Mntrer que les trajectoires sont défines sur des intervalles de la forme $]t_0, +\infty[$ et qu'elles rencontrent successivement les quatres quadrants $(x > 0, y > 0)$, $(x > 0, y < 0)$, $(x < 0, y < 0)$ et $(x < 0, y > 0)$.

4) La trajectoire passant par A recoupe Oy pour la première fois en C. Montrer qu'elle est périodique si et seulement si $OA = OC$.

Exercice 4 (Equation de Bessel)

On cherche $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous la forme $u(x) = w(\|x\|)\, P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ (avec P harmonique ($\Delta P = 0$) et homogène de degré k) solution de l'équation de Helmoltz $\Delta u = -\lambda^2 u$. En posant $r = \|x\|$ et en faisant les changements de fonctions $v(r) = w(r/\lambda)$, $z(r) = r^{n/2-1}v(r)$, montrer qu'alors z vérifie l'équation de Bessel $z'' + \dfrac{1}{r}\, z' + \left(1 - \dfrac{p^2}{r^2}\right) z = 0$, avec $p = k - 1 + n/2$. Chercher les solutions DSE.