Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 219, Année 2005-2006

Problèmes d'Extremum.

Remarques sur la leçon

On peut organiser la leçon selon la nature dont sont les issues les extremums (topologie, calcul différentiel, ...)
On peut se servir de l'introduction du Pommellet, chapitre sur les extremums pour débuter sa présentation orale.
Sur l'aspect topologique, on parlera de la continuité sur un compact, on donnera des applications (Rolle, point fixe, ...), on étudiera le cas où $\lim f = +\infty$ à l'infini et ses applications (d(a,A), polymômes d'approximation, d'Alembert-Gauss, applications en géométrie, ...). On parlera aussi de la projection sur un convexe et éventuellement de conséquences (Lax-Milgram, EDP).
Sur l'aspect calcul diff. et points critiques, on parlera des conditions d'ordre 1 et d'ordre 2. On donnera des applications (calculs sur des exemples, principe du maximum, ...)
A propos du théorème des extremas liés, on donnera des exemples calculatoires mais aussi des applications (inegalités de type convexité : Arithmético-géométrique, géométrie : maximalité du périmètre d'un triangle ou d'un quadrilatère (ex 2), ...)
On peut parler aussi de convexité (Pommellet), d'optimisation (Ciarlet), de fonctions harmoniques, de principe du maximum sur les EDP (Zuily-Queffélec) ...

Les développements possibles sont : Extremas liés + une application (ex 1 et 2 qui suivent), condition d'ordre 2 + une application (par exemple le principe du maximum, cf Gourdon), plusieurs résultats liés à la topologie, le théorème de projection, les extremums et la convexité, ...

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Brézis
- Chambert-Loir , Fermigier
- Gourdon (ex 1)
- Leichtman, Schauer, Exercices X, ENS, tome 4 (ex 2)
- Pommellet
- Rouvière

Exercice 1 [Dvlpt] (Extremas liés)

1) Rappeler l'énoncé du théorème des fonctions implicites.

2) On cherche à prouver l'énoncé suivant : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g_i : U \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, r$ des applications de classe C^1. On pose $g = (g_1, \dots, g_r)$. On note $\Gamma = \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$. On suppose que $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et que les $dg_{i,a}$ sont linéairement indépendantes. On veut montrer qu'il existe des λ_i, appelés multiplicateur de Lagrange, tels que $df_a = \lambda_1 dg_{1,a} + \dots + \lambda_r dg_{r,a}$ et que ces λ_i sont uniques.

a) Montrer l'unicité des λ_i.

b) On pose $s = n-r$. Pourquoi est-ce que $s \geq 0$? Traiter le cas $s = 0$. On suppose maintenant que $s \geq 1$. On identifie dans la suite $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et on note les points $(x, y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$.

c) Quitte à changer le nom des variables, montrer que $\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq r} \neq 0$.

d) Montrer que localement au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$, $g(x, y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$.

e) On pose $h(x) = f(x, \varphi(x))$. Exprimer $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0$. Dériver par rapport à x_i la relation $g(x, \varphi(x)) = 0$.

f) On pose $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_r}(a) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(a) & \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r}(a) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{rg} M \leq r$ et conclure.

Exercice 2 [Dvlpt suite] (Application en géométrie)

On note S le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. On utilise la distance euclidienne. Le but de l'exercice est de trouver pour quels points A, B, C du cercle le périmètre du triangle ABC est maximal.
Pour cela, on fixe A et on note $f(B, C) = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$. On définit aussi $\Delta = \{(u, u)\,;\, u \in \mathbb{R}^2\}$ et $U = ((\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{A\})) \setminus \Delta$.

1) Montrer l'existence d'une solution pour le problème.

2) En appliquant les extremas liés, montrer qu'il existe (λ, μ) tels que $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \lambda \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$ et $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \mu \dfrac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$.

3) Conclure à la nature de ABC.

Exercice 3 (Exercices type oral)

1) Déterminer $\max\limits_{|z|\leq 1} |\sin z|$ en commençant par prouver que ce max est atteint sur le cercle unité.

2) On pose $D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 9\}$. Etudier les extremums de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ sur D.