Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 239, Année 2005-2006

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Il faut parler des propriétés de continuité, de dérivabilité. Pour les applications, on pensera au calcul d'intégrales (en particulier, ne pas oublier la gaussienne !), à la preuve que $G(x) = (f(x) - f(0))/x$ est C^∞ (si f l'est et pour un bon choix de $G(0)$). Voir la feuille Panorama des intégrales à paramètre pour de tels exemples. Il faut aussi parler des transformées classiques : Fourier et Laplace, ce qui fournit la partie exemple et surtout la partie application, en particulier la résolution facile d'EDP qui se ramènent ainsi à des équa. diff.

Ceci forme le socle plus ou moins incontournable, ensuite il est bien de faire un petit tour sur les techniques suivantes : La fonction Γ d'Euler et son prolongement, et les méthodes asymptotiques (méthode de Laplace et de la phase stationnaire). On peut aussi penser au problème tautochrone comme application de la transformée de Laplace aux courbes (cf feuille Transformée de Laplace).

Remarque : Ne pas oublier de placer le calcul de la gaussienne avant les nombreuses utilisations de sa valeur dans les autres exemples !

La leçon permet de nombreux développements (qui se retrouvent dans d'autres leçons, donc à travailler sans modération !):
1) Théorème de continuité et de dérivabilité dans le cadre Riemann (cf panorama),
2) Régularité de la transformée de Laplace et application au calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ (cf Transf. Laplace),
3) Méthode de Laplace (séance correspondante) ou de la phase stationnaire (exercice 1),
4) Prolongement de la fonction Γ d'Euler (séance correspondante).

La bibliographie proposée pour la leçon est :
- Chambert-Loir, Fermigier
- Gourdon
- Leichtman, Schauer
- Pommellet
- Précis d'analyse-géométrie
- Ramis-Odoux-Deschamps
- Spiegel, Transformée de Laplace
- Zuily-Queffélec

Exercice 1 [Dvlpt] (Méthode de la phase stationnaire)

La démarche suit le Zuily-Queffélec et par cette démarche, le développement peut servir à pas mal de leçons. Il faut par contre bien le travailler pour choisir de le présenter. On pourra lui préférer la preuve du Chambert-Loir plus simple (traitée seulement sur un exemple) mais moins riche car n'utilise pas la transformée de Fourier, le prolongement analytique et la formule de Taylor (donc pas polyvalente sur plusieurs leçons).

On s'intéresse au comportement quand $x \to +\infty$ de la fonction

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\varphi(t)} a(t)\,dt,$$

où $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Le résultat va dépendre des points où φ' s'annule. En ces points la phase $e^{ix\varphi(t)}$ ne "tourne" plus assez vite pour permettre à l'intégrale de s' "annuler", et ces points vont donc apporter la contribution la plus importante.

1) On traite tout d'abord le cas où il n'y a pas de telles singularités. On suppose donc que $\varphi' \neq 0$ sur le support de a (en dehors l'intégrale est nulle). On va montrer que dans ce cas

$$\text{pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe } C_N \text{ tel que, pour } x \geq 1, |F(x)| \leq \frac{C_N}{x^N}.$$

Montrer pour cela par récurrence qu'il existe des fonctions $a_N \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $F(x) = \dfrac{1}{x^N}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\varphi(t)} a_N(t)\, dt.$

2) On traite maintenant le cas d'une singularité. On suppose qu'il existe un unique t_0 dans le support de a tel que $\varphi'(t_0) = 0$ et $\varphi''(t_0) \neq 0$. On va montrer que dans ce cas

$$\text{il existe } (A_N)_N(\text{indep. de } x) \text{ tel que, pour tout } N, F(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n\, e^{ix\varphi(t_0)}}{x^{n+1/2}} + R_N(x),\ \text{ pour } x \geq 1,$$

avec

$$|R_N(x)| \leq \frac{C_N}{x^{N+3/2}},\ \text{ pour } x \geq 1.$$

En particulier, on a $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{A_0\, e^{ix\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}, \quad A_0 = \dfrac{\sqrt{2\pi} e^{i\,\sigma\pi/4}}{\sqrt{|\varphi''(t_0)|}} a(t_0), \quad \sigma = \operatorname{sgn}(\varphi''(t_0)).$

a) On commence par traiter le cas particulier où $\varphi(t) = t^2$ et $t_0 = 0$. On pose $F_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2 + ixt^2} a(t)\, dt.$

a1) Montrer que $F_\varepsilon(x) \to F(x)$ quand $\varepsilon \to 0$.

a2) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} e^{-\varepsilon u^2 + ixu^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - ix}} e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - ix)}}$, pour $x \geq 1$ et où $\sqrt{\ }$ désigne la racine carrée principale.

a3) En déduire, en utilisant la formule de Parseval pour la transf. de Fourier, que $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi x}} e^{i\pi/4} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\xi^2}{4x}} \hat{a}(\xi)\, d\xi$ pour $x \geq 1$.

a4) Conclure en utilisant $e^{iy} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(iy)^n}{n!} + \frac{(iy)^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-u)^N e^{iuy}\, du.$

b) On passe maintenant au cas général. On pose $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \psi(t)$.

b1) En faisant le changement de variable $s = t - t_0$ et en posant $\theta(s) = \frac{1}{2}\psi(s + t_0)$, $c(s) = a(s + t_0)$, quelle expression obtient-on pour $F(x)$?

b2) On pose $h(s) = s\sqrt{\sigma\theta(s)}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que h est un C^1-difféomorphisme sur $]-\delta, \delta[$, on note g son inverse.

b3) Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nulle si $|s| \geq 3\delta/4$ et valant 1 pour $|s| \leq \delta/2$. On pose $G_1(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi(s) e^{ixs^2\theta(s)} c(s)\, ds$ et $G_2(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1 - \chi(s)) e^{ixs^2\theta(s)} c(s)\, ds$. Etudier le comportement de G_1 et G_2 à l'aide des questions précédentes et conclure.

Remarque : Le cas de plusieurs singularités isolées donne la somme de telles décompositions.

Exercice 2 (Exercices type oral)

1) Pour $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ décroissante, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{ixt^2} f(t)\, dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2) Calculer la dérivée de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} u(xt)\, dt$ avec u de classe C^1.

3) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + x}\, dt$. Limite en $+\infty$ et en 0^+ ?

4) Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$. (Etudier F'.)

5) Etudier la dérivabilité en 0 de $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(\frac{1}{t})\, dt$.