Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Leçon d'Oral 207, Année 2005-2006
Prolongement de fonctions. Applications.

Remarques sur la leçon

Bien noter en introduction orale que l'on peut toujours étendre une fonction par des valeurs arbitraires, mais ce qui est intéressant c'est d'étendre avec une certaine régularité (continuité, dérivabilité, holomorphie,...)

Un résultat classique et dont la preuve est souvent mal maitrisée est : Soit $f : [a, b[\to E$ un $\mathbb{R}$-Banach, continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que la limite de f' en a^+ existe (notée l). Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$. (Voir gourdon p73). Une application de ce résultat est : $e^{-1/x}\mathbb{1}_{x>0}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Dans cette leçon, on s'attend à voir les prolongements classiques (en plus de l'exponentielle à $\mathbb{C}$) suivants :

Prolongement de la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ d'Euler définie pour $x > 0$ en un fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$,

Prolongement de la fonction $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ de Riemann définie pour $x > 1$ en un fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

On s'attend aussi à voir le théorème des bouts et des équa. diff. (Cf Zuily-Queffélec par exemple), le prolongement analytique (et par exemple en déduire que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ sur les complexes). Parler à ce propos de la notion d'unicité du prolongement (analytique dans ce cas).

Le théorème de Borel est utile à ce niveau car il illustre les différences entre le cas réel et le cas complexe.

Ne pas oublier les applications du théorème de prolongement des applications u-continue : 1) Intégrale de Riemann des fonctions réglées, 2) Complété, 3) Il est bien de placer ici le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin que l'on a vu dans la leçon sur les fonctions holomorphes (comme conséquence du théorème des trois droites), car combiné au théorème de prolongement des applications u-continue, on étend la transformée de Fourier à L^2 et la convolution sur certains espaces L^p, 4) Dans un hilbert, avec Riesz, construction explicite du prolongement (Objectif Agreg).

Penser aussi à : Théorème de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires (ou au moins la version simplifée du Gourdon ou du Pommelet) et ses conséquences. Théorème de Tietze-Urysohn (et comme conséquence partition de l'unité). Théorème taubérien faible (et singularité au bord pour les séries entières).

Exercice 1 (Exercices type oral)

1) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$. Prolongement en -1 et en 1 ? Dérivabilité du prolongement éventuel ?

2) Calculer $\Gamma(1/2)$.

3) Soit $y' = f(t, y)$ où f continue sur $]a, b[\times\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est bornée (resp. $|f(t, y)| \leq C_1|y| + C_2$), alors toute solution maximale est globale.

4) Etude du prolongement et de la dérivabilité éventuelle en 0 de la fonction $f(x) = (\cos x)^{1/x}$.