

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Remarques sur la leçon

Reprendre les points détaillés dans la fiche de la leçon 231. En particulier les exercices de cette autre fiche numéros 1 (Comparaison $\sum f$ + série harmonique), 2 (Inégalité de Carleman) et 5 (Stirling et équivalent de suites. Cet exemple utilise la sommation des relations de comparaison donc à placer au bon niveau dans le plan) peuvent servir pour les deux leçons donc à préparer à l'avance. Le théorème de Cauchy-Mertens (cf Feuille vacances Toussaint) peut aussi servir de développement.

Un enchaînement assez classique : Définitions, exemples. Séries à termes positifs. Alternées, Groupement, convolution. Puis sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale qui permettent en particulier d'avoir le comportement des restes et sommes partielles.

Penser aux exemples classiques : développement asymptotique de $\sum \frac{1}{n}$, de $u_{n+1} = \sin u_n$ (via la comparaison des restes de la série en $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ comme dans l'exercice 5 de l'autre fiche),...

En plus des deux techniques indispensables (sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale) pour avoir des comportement des restes et sommes partielles, on peut étudier les exemples suivants :

Pour $f > 0$ et de classe C^1 telle que $f'/f \xrightarrow{+\infty} p \neq 0$, alors

pour $p \in]0, +\infty[$, $\sum f(n)$ diverge et $\sum_0^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_0^{n+1} f$,

pour $p \in]-\infty, 0[$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_n^{+\infty} f$,

pour $p = -\infty$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n)$. (Moisan-Vernotte + Gourdon).

Soit $u_n > 0$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, si de plus $u_n = o(S_n)$, on peut donner un équivalent des restes ou sommes partielles. Si $\sum u_n$ converge, alors on a des résultats semblables sur $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

On peut parler aussi de théorème de type taubérien, par exemple si $S_n = u_1 + \dots + u_n$ et $\Sigma_n = (S_1 + \dots + S_n)/n$, si (Σ_n) converge et si $|u_n| \leq M/n$, alors $\sum u_n$ converge. (cf Chambert-Loir par exemple).

Exercice 1 (Exercices type Oral)

1) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n e^{-k/(k+1)}$. Donner un équivalent de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

2) Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} k \ln k$.

3) Soit $u_0 > 0$ et la suite définie par $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ avec $0 < a < b$. Calculer la somme de la série dans les cas de convergence. (Donner un équivalent de u_n en prouvant que le \ln de $w_n = n^{b-a} u_n$ converge. Montrer ensuite que $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 0} v_n$ avec $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.)