Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 243, Année 2005-2006

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

On commencera par situer la leçon comme faisant suite à un cours sur les séries de fonctions et donc on admettra comme prérequis tout ce qui concerne cette notion. On prendra aussi comme prérequis la $\mathbb{C}$-dérivabilité.
Rappel : la $\mathbb{C}$-dérivabilité peut-être vue comme la $\mathbb{C}$-différentiabilité ou bien comme l'existence de la limite dans $\mathbb{C}$ de $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ quand $z \to z_0$.
Le début de la leçon est assez classique et on peut suivre un plan du style :
I) 1) définition d'une série entière, Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence, ex de $\sum z^n$.
2) propriétés algébriques (somme, produit), critère de d'Alembert, de Cauchy, ex $\sum n^\alpha z^n$, $\sum z^n/n!$, $\sum n!z^n$ (ce qui donne des rayons de CV variés).
II) continuité, dérivabilité et intégrabilité.
Ensuite, c'est un peu plus souple et cela dépend des goûts, en particulier pour les applications. Néanmoins, il faut parler du développement en série entière d'une fonction et des applications suivantes :

A1 : résolution d'équations différentielles.
A2 : calcul de sommes, d'intégrales ou de suites.
A3 : nombre de solutions d'une équation diophantienne.

Il est bien de considérer le comportement au bord du disque de convergence, en particulier via le théorème d'Abel.
On peut également parler d'holomorphie et dans ce cas parler du principe des zéros isolés, de la formule de Cauchy et de ses conséquences (Th. de Liouville), de l'exponentielle complexe.
De nombreux développements sont possibles, par exemple :

D1 : Lemme d'Abel + Critère de d'Alembert.
D2 : Théorème d'Abel + une application.
D3 : Théorème de Bernstein sur les séries entières..
D4 : Plusieurs exemples conséquents, par exemple issus de A1, A2 et A3.
D5 : Sommabilité au sens d'Abel et théorème de Hardy-littlewood.
D6 : Régularités de la somme d'une série entière.

Par exemple un ensemble D1, D4 avec D2 ou D3 est varié et du meilleur effet...
Des séances de TD sur les développements D2, D3 et D5 sont prévues. Je vous conseille donc de faire en priorité les exercices 3 et 4 qui font intervenir des techniques à connaitre.

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Chambert-Loir , Fermigier, Maillot, Analyse 1
- Gourdon (ex 1, ex 2, ex 5, ex 6)
- Leichtman, Schauer, Exercices X, ENS, tomes 3 et 4 (ex 3 question 3 et 4, ex 4 question 3)
- Pommellet (ex 4 question 2)
- Précis, Analyse-Géométrie, tome 7 (ex 3 questions 2 et 3)
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4
- Ramis, Odoux, Deschamps, exercices analyse tome 2 (ex 3 question 1)
- Rudin, analyse réelle et complexe
- Zuily, Queffélec
- + un livre d'exercices pour fournir d'autres exemples

Remarques sur les leçons rendus

La remarque la plus importante est la suivante : Il manque de vrais applications, c'est-à-dire des applications qui ne sont pas sur les séries entières. Il faut entendre "applications" comme la question suivante : qu'apporte les séries entières aux autres domaines des mathématiques.
Parfois les leçons contenaient trop de résultats anecdotiques d'un point de vue théoriques et pas assez d'applications.
D'une façon générale, les leçons étaient pauvres en exemples. Par exemple, dans la partie sur la dérivation, intégration des séries entières, on devrait mentionner qu'à partir de l'égalité $\sum z^n = 1/(1-z)$ on en obtient beaucoup d'autres...

Exercice 1 [Dvlpt] (Théorème d'Abel)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\sum a_n$ converge. Pour $\alpha \in [0, \pi/2[$, on pose

$$D_\alpha = \{|z| < 1\,;\, z = 1 - \rho e^{i\theta},\, \theta \in [-\alpha, \alpha],\, \rho \in]0, \cos\alpha]\}.$$

1) Dessiner D_α. Préciser pourquoi est-ce que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ satisfait $R \geq 1$?

2) Montrer que pour $z \in D_\alpha$, on a l'inégalité $\dfrac{|z-1|}{1-|z|} \leq \dfrac{2}{\cos\alpha}$.

3) En déduire que $\displaystyle\lim_{z\to 1,\, z\in D_\alpha} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4) Exemple : montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 2 [Dvlpt] (Théorème de Bernstein)

Ce théorème dit que si $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ avec $a > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$, alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

1) Soit $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1[$, $g^{(k)}(x) \geq 0$.

a) On pose $r_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n g^{(n+1)}(tx)\, dt$. Pour $0 \leq x < y < 1$, comparer $r_n(x)$ et $r_n(y)$.

b) En déduire que pour $0 \leq x < 1$, $g(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

c) On remplace l'intervalle $[0, 1[$ par $]-1, 1[$ dans les hypothèse sur g, montrer que pour $-1 < x < 1$, $g(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

2) Montrer que $g(x) = f(x) + f(-x)$ permet de montrer le théorème de Bernstein avec $a = 1$. Conclure.

Remarque : ce développement est bien utile pour la leçon sur la formule de Taylor.

Remarque : ceci permet de dire que $\tan$ *est développable en série entière en 0.*

Exercice 3 [Dvlpt] (Calcul des sommes, d'intégrales et de suites)

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + x + \cdots + x^n)}{x}\, dx$. (On utilisera le développement en série entière de $\ln(1-u)$.)

3) On définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ avec $a_0 = a$.

a) On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Etablir un lien entre $f^2(z)$ et $f(z)$.

b) En déduire que $f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4az}}{2z}$.

c) En utilisant un développement en série entière, conclure à la valeur des a_n.

Exercice 4 (Autres applications classiques : Dénombrement et équations différntielles)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer a_n le cardinal de l'ensemble $\{(u, v) \in \mathbb{N}^2\,;\, 2u + 3v = n\}$.

a) Montrer que $\sum a_n x^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries entières simples.

b) Développer $\frac{1}{1-z^2}\frac{1}{1-z^3}$ en éléments simple et conclure.

2) On cherche à résoudre l'équation de Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$.

On cherche une solution sous la forme $x^\lambda \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$.

a) Montrer que $2[(n+\lambda) - \nu]a_n + a_{n-2} = 0$ pour $n \geq 2$.

b) Dans le cas $\lambda = \nu$, calculer les a_n.

c) Traiter les autres cas de figure.

3) En utilisant la même méthode, résoudre $xy'' + 2y' + \omega^2 y = 0$.

(Réponse : solutions engendrées par $x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos(\omega x)}{x}$.)

4) On rappelle qu'une involution est une permutation s telle que $s^2 = Id$. On note I_n le nombre d'involution sur $\{1, \cdots, n\}$.
a) Montrer que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{I_n}{n!} x^n$. Montrer que $f'(x) = 1 + x + f(x) + xf(x)$. Exprimer I_n en fonction des coefficients a_n du développement en série entière en 0 de $g(x) = e^{x+x^2/2} \int_0^x (1+u)e^{-u-u^2/2}\, du$.

Exercice 5 (Théorème de Tauber)

Ceci est une réciproque partielle du théorème d'Abel (d'où son nom de théorème taubérien) dans le cas où $a_n = o(1/n)$.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R = 1$. On suppose que $\lim_{z\to 1^-,\, z\in\mathbb{R}} f(z) = S$, et que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut S.

Exercice 6 [Dvlpt] (Sommabilité au sens d'Abel)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels. On dit qu'elle est sommable au sens d'Abel si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$ et que $f(x)$ a une limite $S \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to 1^-$. S est alors appelée la somme au sens d'Abel de la série.

1) Montrer que si $\sum a_n$ est convergente, alors elle est sommable au sens d'Abel.

2) Montrer que si $\sum a_n$ est convergente au sens de Césaro, alors elle est sommable au sens d'Abel.

3) Soit $\sum a_n$ une série sommable au sens d'Abel avec $S = 0$. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ valant 1 sur $[1/2, 1]$ et 0 ailleurs, et soit $h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$ sur $]0,1[$, $h(0) = -1$, $h(1) = 1$.

a) Montrer qu'il existe q_1, q_2 des polynômes tels que $q_1 - \varepsilon < h < q_2 + \varepsilon$, avec $\int_0^1 (q_2 - q_1) < \varepsilon$.

b) Montrer qu'il existe p_1, p_2 des polynômes nuls en 0 et valant 1 en 1 tels que $p_1 \leq g \leq p_2$, avec $\int_0^1 q(x)\, dx < 3\varepsilon$ où $q(x) = \frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}$.

c) On suppose que $a_n = O(\frac{1}{n})$. Montrer que $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n) \right| \leq M(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n q(x^n)$.

d) En étudiant la limite quand $x \to 1^-$ des termes de la relation de la question c), montrer que $\sum a_n$ est convergente de somme 0.

e) En déduire le théorème de Hardy-Littlewood : si $\sum a_n$ est sommable au sens d'Abel et que $a_n = O(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge.

f) Relier ce thérorème au théorème d'Abel et à celui de Tauber.