Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 231, Année 2005-2006

Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

Remarques sur la leçon

Comme son titre l'indique clairement, il s'agit d'une leçon d'*exemples*, ce qui veut dire que les résultats généraux et les théorèmes sur les séries sont hors-sujet. Les différents résultats doivent rester sous-jacent, par exemple à travers le plan, et seuls des exemples et des contre-exemples doivent être écrit dans le plan.

Il est nécessaire de fournir des exemples et contre-exemples sur les points suivants :

- Propriétés algébriques (somme, produit par constante, produit de Cauchy, comparaison,...)
- Terme général vers 0 ?, CVA et CV
- Séries à termes positifs (Sommes partielles majorées, critère de Cauchy, de D'alembert, de Raabe-Duhamel)
- Séries à termes quelconques (équivalence, CSA, Abel, Commutativité, Associativité, équivalence des restes,...)

La leçon est facile *si* on l'a préparé avant et difficile sinon. Il est souhaitable ici de proposer trois développements, car les techniques sont assez faciles à se remémorer pendant le temps de préparation, néanmoins pour cela il faut avoir travailler ces développements pendant l'année. On peut par exemple proposer les exercice 1, 2 et 5 de cette feuille comme développement. Les exercices 3 et 4 fournissent des exemples très utiles pour cette leçon auxquels on ne pense pas toujours.

La bibliographie proposée pour la leçon est :

- Chambert-Loir , Fermigier, Maillot, Analyse 1 (ex 2)
- Combes, Suites et séries
- Gelbaum, Olmstad, Counterexamples in analysis (ex 3 et 4)
- Gourdon (ex 1, ex 5)
- Hauchecorne, Contre-exemples en mathématiques (ex 3)
- Leichtman, Schauer, Exercices X, ENS, tome 3 (ex 3 et 5)
- Pommelet (ex 5)
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4

Exercice 1 [Dvlpt] (Comparaison série-intégrale et série harmonique)

1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge.

a) Montrer que $f \geq 0$.

b) Montrer que pour $x \geq 0$, $$x \sum_{n=1}^{N} f(nx) \leq \int_0^{+\infty} f,$$

et en déduire la convergence de $\sum f(nx)$ pour tout $x > 0$.

2) Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

a) Montrer que H_n est équivalent à $\ln n$ quand $n \to +\infty$.

b) On pose $U_n = H_n - \ln n$. En trouvant un équivalent de $U_{n+1} - U_n$, montrer que la série de terme général $U_{n+1} - U_n$ est convergente. En déduire que la suite de terme général U_n est convergente, on note γ sa limite.

c) On pose $V_n = H_n - \ln n - \gamma$. Montrer que la série de terme général $V_{n+1} - V_n$ est convergente en donnant un équivalent de $V_{n+1} - V_n$.

d) Lorsque $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, sous quelles hypothèses peut-on comparer $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\sum_{k=1}^{n} b_k$. Même question pour $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

e) En utilisant les deux questions précédantes, montrer que V_n est équivalent à $\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

f) Conclure que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2n}\right)$.

Exercice 2 [Dvlpt] (Inégalité de Carlemann)

Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n$ converge. On pose $v_n = (u_1 \cdots u_n)^{1/n}$

a) On pose $w_n = \sum_{p=1}^{n} p u_p$. Montrer que $v_n \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}\frac{1}{n}w_n$ pour tout $n \geq 1$.

b) Montrer que $(n+1)\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

c) Faire une transformation d'Abel sur le terme $\sum_{n=1}^{N} w_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

d) Conclure que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3 (Quelques exemples et contre-exemples)

1) Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ où

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$, b) $u_n = \frac{nn!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$, c) $u_n = \frac{1}{3^n}$ si n est pair, et $\frac{4}{3^n}$ si n est impair.

2) Etudier la convergence des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et de leur série produit de Cauchy $\sum u_n$ où

a) $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, b) $a_0 = 2$, $b_0 = -1$, $a_n = 2^n$ et $b_n = 1$ pour $n \geq 1$.

Exercice 4 (Intégrales et séries)

Donner un exemple de fonctions $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telles que

a) $\int_0^{+\infty} f$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ diverge, b) $\int_0^{+\infty} f$ diverge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge.

Exercice 5 [Dvlpt] (Utilisation des séries : Stirling via Wallis et Equivalent de suite)

1) Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $(n+1)I_n = (n+2)I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ et que $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

c) Soient $v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$, $s_n = \ln v_n$ et $u_n = s_n - s_{n-1}$. Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) En déduire que la suite (v_n) converge. On note σ la limite. En considérant la limite de $\frac{\sqrt{2}v_{2n}}{(v_n)^2}$, trouver σ et en déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

2) Soit $u_0 > 0$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour $n \geq 0$.

a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n^{1-\alpha}$.

c) En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Remarque : En poussant le développement à des ordres plus élevés, on obtient un développement asymptotique de u_n. Un exemple classique de la même technique est d'obtenir le développement asymptotique de u_n définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ (voir Gourdon).