Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçons d'Oral, Année 2005-2006

223, Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224, Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

Remarques sur la leçon

Suivre un cours de base et rajouter vos exemples préférés.

Penser à la méthode en α pour le comportement asymptotique de $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

Rappel 1 : Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ $u_0 \in I$, λ est un point fixe dit stable si $|f'(\lambda)| < 1$, quasi-stable si $|f'(\lambda)| = 1$ et instable si $|f'(\lambda)| > 1$.

Rappel 2 : A propos de la vitesse de convergence de u_n vers α, notant $e_n = u_n - \alpha$, elle est dite linéaire (ou d'ordre 1) si $|e_{n+1}| \leq L|e_n|$ avec $L < 1$, super-linéaire si $|e_{n+1}| \leq q_n|e_n|$ avec $q_n \to 0$ et d'ordre p si $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^p$ (dans le cas $p = 2$, on parle de convergence quadratique).

Les compléments utiles sur la leçon sont :

Exercice 1 (Méthode de Newton)

Soit f de classe C^1 de $I = [u_0 - c, u_0 + c]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|f(x_0)| \leq cm$, et pour tout $y, z \in I$, $|f'(y)| \geq 2m$, $|f'(y) - f'(z)| \leq m$. On pose $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_{n+1})}$.

1) Montrer que $|u_n - u_{n-1}| \leq \dfrac{c}{2^n}$, $u_n \in I$ et $|f(u_n)| \leq \dfrac{cm}{2^n}$.

2) Montrer que f possède une unique racine α dans I et que $u_n \to \alpha$.

3) Pour f de classe C^2 et telle que $|f''| \leq M$ sur I, alors il existe q tel que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{(cq)^{2^n}}{q}$.

4) Application : approximation de la racine carrée d'un nombre entre 2 et 200, puis de tout nombre plus grand que 2.

(Référence : Pommellet et Baranger (Introduction à l'analyse numérique))

Exercice 2 (Accélération d'Aitken et de Steffenson)

Soit $x_n \to \xi$ et telle qu'il existe $|k| < 1$ et $\varepsilon_n \to 0$ telle que $x_n \neq \xi$ and $x_{n+1} - \xi = (x_n - \xi)(k + \varepsilon_n)$.

1) Montrer que $y_n = x_n - \dfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$ est bien définie et converge vers ξ plus rapidement, c'est-à-dire que $\dfrac{y_n - \xi}{x_n - \xi} \to 0$.

2) La méthode de Steffenson consiste, étudiant la convergence de $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f de classe C^1, à poser $y_n = f(x_n)$ et $z_n = f(y_n)$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n}$.

a) Montrer qu'il existe g tel que $x_{n+1} = g(x_n)$. Correspondance entre les points fixes de f et de g ?

b) Pour f de classe C^2, si $x_n \to \xi$ un point fixe instable ξ de f, pour x_0 assez proche de ξ, alors Steffenson converge vers ξ.

(Référence : Chambert-Loir)

Exercice 3 (Stabilité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ $u_0 \in I$, λ est un point fixe.

1) a) Si $u_n \to \lambda$ instable, alors u_n stationne en λ.

b) Si λ est stable, alors il existe un voisinage de λ dans lequel u_0 donne une suite u_n convergente vers λ.

2) On suppose f de classe C^2, I compact et $|f'(x)| \leq k$, $k \in]0,1[$ pour tout $x \in I$. Montrer que f possède un point fixe unique λ et que pour $u_0 \in I$, $u_n \to \lambda$. On suppose $K = f'(\lambda) > 0$ et qu'il existe n_0 tel que $u_n > \lambda$ pour $n \geq n_0$. Montrer qu'alors $u_n - \lambda \sim cK^n$.
(Référence : Pommellet)

Exercice 4 (Tranformation de Toeplitz)

Soit (c_{nm}) une suite double. Pour (u_n) une suite, on pose (si c'est possible) $(Tu)_n = \sum_{m=0}^{+\infty} c_{nm} u_m$. On dit que la transformation T est régulière si pour toute suite (u_n) convergente, la suite $((Tu)_n)$ est convergente et de même limite.

Montrer que T est régulière si et seulement si la suite (c_{nm}) vérifie les trois conditions

i) $\exists A$ tel que $C_n = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} |c_{nm}| < A$ pour tout n,

ii) pour tout m, $c_{nm} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$,

iii) $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} c_{nm} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

(Référence : Chambert-Loir)

Exercice 5 (Equirépartition)

Soit (x_n) une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a < b < 1$, on pose $N(a,b,n) = \mathrm{card}\{m \leq n\,;\, x_m \in [a,b[\}$. On dit que (x_n) est équirépartie si $N(a,b,n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(b-a)$.

1) Montrer que si (x_n) est équirépartie, alors $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1[$.

2) Montrer que (x_n) est équirépartie si et seulement si pour tout fonction f Riemann intégrable sur $[0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f$.

3) Montrer que (x_n) est équirépartie si et seulement si pour tout fonction f continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f$.

4) Montrer que (x_n) est équirépartie si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$. (Critère de Weyl).

5) Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $(n\theta)$ le nombre de $[0,1[$ tel que $n\theta - (n\theta) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(n\theta)$ est équirépartie.
(Référence : Chambert-Loir)