Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 208, Année 2005-2006

Utilisation de la continuité uniforme en analyse.

Remarques sur la leçon

Base de travail : Pommelet à partir de la page 58.
Ne pas oublier :
La régularité des intégrales à paramètres,
Les polynômes de Bernstein (et donc Stone-Weierstrass),
Les conséquences de Heine simples (par exemple qu'une fonction continue de $[0,1]$ dans e.v.n. est limite uniforme de fonctions affines par morceaux),

Le prolongement des fonctions u-continue et ses conséquences (Intégrale de Riemann des fonctions réglées, complété, prolongement de la transformée de Fourier à L^2 et de la convolution sur certains espaces L^p à l'aide du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin que l'on a vu dans la leçon sur les fonctions holomorphes comme conséquence du théorème des trois droites).

Donner un exemple qui montre que le théorème de prolongement est en défaut si on a seulement la continuité (par exemple, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la distance usuelle avec Arctan, cf Schwartz, Analyse : Topo générale et A.F.). Ce genre de remarque est extremement utile pour montrer l'intérêt de la notion et montre que l'on a compris le sens de la leçon,

La régularisation par des approximations de l'unité qui permet de montrer le théorème de Féjer sur les séries de Fourier et une autre preuve de Stone-Weierstrass (par convolution ici).

Le deuxième théorème de Dini (celui avec les fonctions croissantes qui converge vers une fonction continue).

On peut montrer aussi le lemme de Riemann-Lebesgue (séries de Fourier) qui peut se démontrer à l'aide de la continuité de la translation $f \mapsto \tau_a(f)$ (ceci utilisant la continuité uniforme).

La notion de continuité uniforme (en vertu du théorème de Heine) prend tout son sens à l'infini par rapport à la continuité classique, il faut donc s'attendre à ce que ces cas de figure intéressent le jury ! (Voir l'exercice 1). Si vous n'en parler pas, c'est clair que vous aurez des questions dessus.

On peut bien sur parler de la notion d'équicontinuité et donc du théorème d'Ascoli et ses conséquences (Cauchy-Péano et Montel).

Remarque : Pour la preuve qu'une fonction continue et périodique est uniformément continue, appliquer Heine sur un intervalle *plus grand* qu'une période, sinon cela ne marche pas...

Exercice 1 (Uniforme continuité et comportement à l'infini)

1) La fonction $x \mapsto x^2$ est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

2) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'alors il existe a, b tel que $|f(x)| \leq ax + b$ pour tout $x \geq 0$.

3) Est-ce une condition suffisante pour avoir continuité uniforme ?

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ayant des limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

5) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer qu'alors $f \to 0$ en $+\infty$.

Exercice 2 (Autres Exercices type Oral)

1) Soit $f : [a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer l'équivalence entre $i)$ f uniformément continue sur $[a, b[$ et $ii)$ f peut être prolongé par continuité en b.

2) Soit u_n, $v_n \geq 0$ telle que $u_n - v_n \to 0$. Montrer que $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} \to 0$. (On montrera pour cela que $\sqrt{}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.