**Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,**
*Panorama et TD, Année 2005-2006*
**Fonctions holomorphes**

## Fonctions Holomorphes, Formule de Cauchy et Lien avec l'analycité

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On note $U$ le disque unité ouvert.

*Définition 1, Holomorphie en un point :* $f$ est holomorphe (ou $\mathbb{C}$-dérivable) en $a \in \Omega$ si $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ possède une limite en $a$ dans $\Omega \setminus \{a\}$. On note cette limite $f'(a)$.

*Définition 2, Holomorphie sur un ouvert :* $f$ est holomorphe sur $\Omega$ si $f$ est holomorphe en tout $a \in \Omega$. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\Omega$.

*Remarque 1 :* $f$ est holomorphe en $a$ revient à voir que $f$ est différentiable en tant que fonction du $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même, sa différentielle étant une similitude directe.

*Rappel :* Une fonction est dite analytique en un point si elle est développable en série entière en ce point.

*Théorème 1, Lien entre holomorphie et analycité :* $f$ est holomorphe sur $\Omega$ si et seulement si $f$ est analytique sur $\Omega$.

Pour montrer le sens le plus délicat de ce résultat, on va avoir besoin d'un résultat important : la formule de Cauchy.

*Définition 3, Courbes et Chemins :* Une courbe dans un espace topologique $X$ est une application $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to X$. L'intervalle $[\alpha, \beta]$ s'appelle l'intervalle de paramétrisation. Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, on dit que la courbe est fermée. Un chemin est une courbe continue et $C^1$ par morceaux.

On pose alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$

Par exemple pour un triangle de sommets $a, b, c$ noté $\Delta$, on a $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$ pour toute fonction $f$ continue sur la frontière de $\Delta$.

*Définition 4, Indice en un point par rapport à un chemin fermé :* Soit $\gamma$ un chemin fermé et $\Omega$ le complémentaire de $Im(\gamma)$ dans $\mathbb{C}$. On appelle indice de $z$ par rapport à $\gamma$ la quantité $\displaystyle Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,d\xi.$

*Théorème 2, Théorème de Cauchy :* Soit $\Omega$ un ouvert convexe, $p \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout $\gamma$ chemin fermé de $\Omega$.

*Théorème 3, Formule de Cauchy :* Soit $\Omega$ un ouvert convexe, $\gamma$ un chemin fermé de $\Omega$ et $f \in H(\Omega)$. Soit $z \in \Omega \setminus Im(\gamma)$. Alors $\displaystyle f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$

*Remarque 2 :* On montre au passage que si $\Omega$ est un ouvert convexe, alors toute $f \in H(\Omega)$ possède une primitive.

*Corollaire 1, Formule de la moyenne :* Soit $\Omega$ un ouvert convexe, $z_0 \in \Omega$ et $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $f \in H(\Omega)$. Alors $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt$ pour tout $0 < r < R$.

*Corollaire 2 :* Soit $\Omega$ un ouvert convexe, $z_0 \in \Omega$ et $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $f \in H(\Omega)$. On note $\sum a_n(z - z_0)^n$ le DSE de $f$ en $z = z_0$. Alors $\displaystyle a_n = \frac{1}{2\pi\, r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, e^{-int}\,dt$ pour tout $0 < r < R$.

*Corollaire 3 :* Si $f \in H(\Omega)$, alors $f' \in H(\Omega)$.

*Théorème 4, Théorème de Morera :* Soit $f \in C(\Omega)$. Alors $f \in H(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ pour tout $\Delta$ triangle inclus dans $\Omega$.

*Théorème 5, Variante du Théorème de Morera :* Soit $f \in C(\Omega)$. Alors $f \in H(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\partial\square} f(z)\,dz = 0$ pour tout $\square$ rectangle inclus dans $\Omega$ et dont les côtés sont parallèles aux axes.

*Théorème 6, Théorème de Weierstrass :* Soient $f_n \in H(\Omega)$ qui convergent uniformément sur tout les compacts de $\Omega$ vers une fonction $f$. Alors $f \in H(\Omega)$.

*Définition 5, Fonction entière :* Une fonction entière est une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

*Théorème 6, Théorème de Liouville :* Toute fonction entière et bornée est constante.

**Exercice 1 [Cours] (Relations de Cauchy-Riemann)**

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x+iy) = P(x,y)+iQ(x,y)$ où $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f$ est holomorphe en $z_0 = x+iy$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ en $z_0$.

**Exercice 2 [Cours] (Analytique $\Rightarrow$ Holomorphe)**

Montrer que si $f$ est DSE en $z = 0$, alors $f$ est holomorphe en $z = 0$.

**Exercice 3 (Chemins équivalents)**

Soit $\varphi$ une bijection de classe $C^1$ de $[\alpha_1, \beta_1]$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi(\alpha_1) = \alpha$ et $\varphi(\beta_1) = \beta$. On pose $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$. On parle alors de chemins équivalents.

**Exercice 4 (Indice de $z$ par rapport à $\gamma$)**

1) Montrer que $Ind_\gamma(z)$ est une fonction à valeurs entières sur $\Omega$, constante sur chaque composante connexe de $\Omega$ et nulle sur celle qui est non bornée. Pour cela, on posera $\varphi(t) = \exp\left(\displaystyle\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right)$ avec les notations de la définition 3, et on commencera par montrer que $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ est constante sur $[\alpha, \beta]$.

2) Soit $\gamma$ le cercle orienté positivement de centre $a$ et de rayon $r$. Montrer que $Ind_\gamma(z)$ vaut 1 si $|z-a| < r$ et 0 si $|z-a| > r$.

3) Montrer que $Ind_\gamma(z)$ reste constant lorsque le chemin fermé $\gamma$ se déforme continuement sans passer par $z$. (Cette question est à rapprocher de la notion d'ouvert simplement connexe et à l'homotopie, voir plus loin. On peut aussi montrer d'autres propriétés, par exemple, que si $Im(\gamma) \subset \Omega'$ ouvert simplement connexe ne contenant pas $z$, alors $Ind_\gamma(z) = 0$).

On passe maintenant à la preuve du Théorème de Cauchy, pour cela on va montrer les étapes intermédiaires suivantes :
*Proposition 1, Intégrale d'une dérivée :* : Soit $F \in H(\Omega)$ telle que $F' \in C(\Omega)$. Alors $\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$ pour tout $\gamma$ chemin fermé dans $\Omega$.

*Corollaire 4 :* $\int_\gamma z^n\,dz = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $n = -2, -3, \cdots$ si $0 \notin Im(\gamma)$.

*Proposition 2, Théorème de Cauchy dans un triangle :* Soit $p \in \Omega$. Soit $\Delta$ un triangle fermé inclu dans $\Omega$. Soit $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Alors $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

*Remarque 3 :* On montrera plus loin qu'en fait, cela implique que $f \in H(\Omega)$.

**Exercice 5 [Cours] (Théorème de Cauchy dans un triangle)**

On note $a, b, c$ les sommets de $\Delta$. On pose $J = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.

1) Montrer la Proposition 1 et le Corollaire 4.

2) On commence par le cas où $p \notin \Delta$.

a) En considérant les milieux des segments du bord du triangle, construire un triangle que l'on notera $\Delta_1$ dont deux des sommets sont dans l'ensemble des sommets de $\Delta$ et le troisième sommet est l'un des milieux et tel que $|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz| \geq J/4$.

b) Construire par récurrence une suite de triangles $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$ tels que $|J| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|$.

c) Appliquer la définition de l'holomorphie de $f$ en $z_0 \in \cap\Delta_n$ et en conclure que $J = 0$.

3) Traiter le cas où $p$ est un sommet de $\Delta$.

4) Conclure dans le cas général.

**Exercice 6 [Cours] (Théorème de Cauchy et Holomorphe $\Rightarrow$ Analytique)**

1) Montrer le Théorème 2 en posant $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi$ (existence ?) et en justifiant soigneusement.

2) Montrer le Théorème 3 en utilisant la fonction $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ si $\xi \neq z$ et $f'(z)$ sinon.

3) Soit $D(a,R) \subset \Omega$ et $\gamma$ le cercle orienté positivement de centre $a$ et de rayon $r < R$. Appliquer le Théorème de Cauchy sur ce cercle pour conclure au Théorème 1.

4) Montrer les Corollaires 1, 2 et 3.

5) Montrer le Théorème de Morera et son corollaire : le Théorème de Weierstrass.

**Exercice 7 (Principe de symétrie de Schwarz)**

1) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ voisinage ouvert d'un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. On pose $\Omega^+ = \{z \in \Omega\,;\, Im(z) > 0\}$ et $\Omega^- = \{z \in \Omega\,;\, Im(z) < 0\}$. Soient $f^+ : \Omega^+ \to \mathbb{C}$ et $f^- : \Omega^- \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes qui se prolongent en une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $f$ est holomorphe sur $\Omega$. (On pourra utiliser la variante du Théorème de Morera.)

2) Soient $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\, Im(z) > 0\}$ et $f : \overline{P} \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $P$, réelle sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ se prolonge en une fonction entière.

**Exercice 8 (Théorème de Liouville et de d'Alembert-Gauss)**

1) Soit $f$ analytique en $z_0$, il existe donc une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ qui coïncide avec $f$ sur un disque $D(z_0,R)$. Montrer que pour tout $0 < r < R$, on a $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2\,dt = \sum |a_n|^2 r^{2n}$. (On utilise ici le fait que la restriction de la série entière à un cercle de centre $z_0$ est une série trigonométrique.)

2) Montrer les Inégalités de Cauchy : $|a_n| \le \dfrac{\|f\|_{\infty,\overline{D}(0,r)}}{r^n}$ pour tout $0 < r < R$.

3) En déduire le Théorème de Liouville et celui de d'Alembert-Gauss.

**Exercice 9 (Utilisation de la formule de Cauchy)**

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une fonction holomorphe sur $D(0,1)$.

1) Montrer que si $|a_n| \le M$ pour tout $n$, alors $|f(z)| \le \frac{M}{1-|z|}$, $|f'(z)| \le \frac{M}{(1-|z|)^2}$.

2) Montrer que si $|f(z)| \le M$, alors $|a_n| \le M$ et $|f'(z)| \le \frac{M}{1-|z|}$.

**Exercice 10 (Intégrale à paramètre de fonctions holomorphes)**

1) Montrer que si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(t,z) \mapsto f(t,z)$ continue sur $[a,b] \times \Omega$ holomorphe par rapport $z$ pour tout $t$, alors $z \mapsto \int_a^b f(t,z)\,dt$ est holomorphe sur $\Omega$.

2) En utilisant le Théorème de Weierstrass, quelle hypothèse faut-il rajouter pour considérer le cas où $b = +\infty$.

*Remarque 4 :* Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on a des résultats du style : Soit $(X, , \mu)$ un espace mesuré, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que $i)$ $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto f(t,z) \in L^1_\mu(X)$, $ii)$ p.p. $t \in X$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur $\Omega$, $iii)$ pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe $g \in L^1_\mu(X)$ tel que $|f(t,z)| \le g(t)$, p.p. $t \in X$, $\forall z \in K$, alors $F(z) = \int_X f(t,z)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur $\Omega$ et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,d\mu(t)$.

---

## Zéros isolés, Prolongement analytique et Principe du maximum

Le prolongement analytique permet le passage de certaines propriétés locales au global. Ceci permet par exemple d'étendre certains résultats de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

*Définition 6, Domaine :* Un domaine $\Omega$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

*Théorème 8, Principe des zéros isolés :* Soit $f$ holomorphe non constante sur un domaine $\Omega$. Alors les zéros de $f$ forment un ensemble de points isolés.

*Théorème 9, Prolongement analytique :* Soient $f, g$ holomorphes non constantes sur un ouvert connexe $\Omega$. Si $\{a\,;\, f(a) = g(a)\}$ possède un point d'accumulation dans $\Omega$ alors $f = g$ dans $\Omega$.

*Théorème 10, Principe du maximum :* Soit $f$ holomorphe sur un domaine $\Omega$. Si $|f|$ possède un maximum local dans $\Omega$, alors $f$ est constante.

**Exercice 11 [Cours] (Zéros isolés et prolongement analytique)**

1) Montrer le principe des zéros isolés en faisant un développement limité au voisinage d'un éventuel point d'accumulation.

2) Montrer le théorème du prolongement analytique.

3) Montrer le principe du maximum en utilisant la question 1 de l'exercice 8.

**Exercice 12 (Lemme de Schwarz)**

Soit $f \in H(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0,1)$.

1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$.

2) Montrer que s'il existe $z_0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe $\lambda$ tel que $f(z) = \lambda z$.

**Exercice 13 (Transformation de Koebe)**

Soit $\alpha \in U$ et $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$.

1) Montrer que $\varphi_\alpha$ est une bijection holomorphe de $U$ dans $U$.

2) Calculer $\varphi'_\alpha(0)$ et $\varphi'_\alpha(\alpha)$.

3) Soient $f : U \to U$ et $\alpha \in U$. On pose $\beta = f(\alpha)$. Montrer que $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$. (On posera $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$.)

**Exercice 14 (Existence d'un zéro)**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $U$. Soit $f \in H(\Omega)$ tel que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que $f$ possède au moins un zéro dans $U$.

**Exercice 15 (Une différence entre $C^\infty$ pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)**

1) Montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction holomorphe telle que $f(1/n) = 1/n^2$ pour $n$ assez grand.

2) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions réelles $C^\infty$ qui vérifient cette condition.

---

## Singularités, Développement de Laurent et Théorème des résidus

*Définition 7, Singularités :* Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. On suppose que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ et que $f$ est holomorphe que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors on dit que $z_0$ est une singularité pour $f$.

*Théorème 11 et Définition 8, Classification des singularités :* Soit $\Omega$ un domaine et $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Alors on a l'un des cas suivants:

a) $f$ peut être définie en $z_0$ de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe. On parle alors d'une singularité artificielle.

b) Il existe des complexes $c_1, \cdots, c_m$ avec $c_m \neq 0$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ a une singularité artificielle en $z_0$. On parle alors d'une singularité isolée, appelée pôle d'ordre $m$ et pour laquelle $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ désigne la partie principale de $f$ en $z_0$. $f$ est dite méromorphe en $z_0$.

c) Il existe $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $Imf(\overline{D(z_0, r)})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On parle alors d'une singularité essentielle.

*Corollaire 5 et Définition 9, Développement de Laurent en une singularité isolée et Résidu:* Dans les cas b) et c), on a l'existence d'une unique $g$ entière, nulle en 0 telle que $z_0$ soit une singularité artificielle pour $z \mapsto f(z) - g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Si $g$ est un polynôme, on est dans le cas b).

Le résidu de $f$ en $z_0$ est le premier coefficient du développement de $g$ en $z_0$ :

$$g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \frac{Res(f, z_0)}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)2} + \cdots.$$

*Remarque 5 :* Dans le cas d'une fraction $f(z) = P(z)/Q(z)$ avec $P$ et $Q$ deux fonctions holomorphes, et pour $z_0$ un pôle simple, on a $Res(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

Dans le cas d'un pôle d'ordre $m$, on a la formule $Res(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right)$.

*Théorème 12, Théorème des résidus :* Soit $\Omega$ un domaine convexe, $f$ holomorphe sur $\Omega \setminus (\cup_{i=1,\dots,n}\{a_i\})$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum Res(f,a_i)\,Ind_\gamma(a_i)$.

*Remarque 6 :* le Théorème des résidus se généralise aux ouverts étoilés et plus généralement aux ouverts simplement connexes, c'est-à-dire aux ouverts pour lesquels toute courbe fermée est homotope à 0 dans $\Omega$. On dit que deux chemins $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont homotopes s'il existe $h : [0,1]^2 \to \Omega$ continue telle que $h(0,t) = \gamma_1(t)$, $h(1,t) = \gamma_2(t)$ et $h(s,0) = h(s,1)$. (C'est-à-dire que $\gamma_1$ se "déforme" continuement en $\gamma_1$ dans $\Omega$.) On dit que le chemin $\gamma_1$ est homotope à 0 si $\gamma_1$ est homotope à un chemin dont l'image est réduit à un point. Il existe des propriétés équivalentes à la propriété d'être un ouvert simplement connexe :
a) $\forall f \in H(\Omega)$, $\forall\gamma$ chemin fermé dans $\Omega$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. (Cette propriété n'est rien d'autre que le théorème de Cauchy, les ouverts simplements connexes peuvent donc être défini comme les ouverts sur lequel le théorème de Cauchy est vrai. Comme c'est le théorème de Cauchy qui est sous-jacent à toutes les preuves, c'est bien le cadre optimal pour une telle étude).
b) $\Omega$ est homéomorphe à $U$.
c) Toute $f \in H(\Omega)$ possède une primitive holomorphe.
d) Toute $f \in H(\Omega)$ possède un logarithme holomorphe.
de Toute $f \in H(\Omega)$ possède une racine carrée holomorphe.

*Remarque 7 :* On peut aussi en se placant sur la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire en rajoutant à $\mathbb{C}$ un "point à l'infini", obtenir l'énoncé suivant : Soit $f$ méromorphe sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$. On note $P$ l'ensemble des pôles de $f$. Si pour tout chemin fermé de $\Omega \setminus P$, on a $Ind_\gamma(z) = 0$ pour tout $z \in S^2 \setminus \Omega$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in P} Res(f,a)\,Ind_\gamma(a)$.

### Exercice 16 (Théorème des résidus)

1) Montrer le théorème 12 en considérant $f - \sum Q_i$ où les $Q_i$ sont les parties principales de $f$ aux pôles $a_i$.

2) Quelle est la conséquence de la question 3 de l'exercice 4 sur le calcul des $Ind_\gamma(a_i)$ ?

### Exercice 17 (Théorème des singularités isolées de Riemann)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. On suppose que $D(z_0,r)\setminus\{z_0\} \subset \Omega$ et que $f$ est holomorphe que $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Si $f$ est bornée au voisinage de $z_0$, alors $z_0$ est une singularité artificielle pour $f$.

### Exercice 18 [Dvlpt] (Existence d'une singularité essentielle)

Précisons la notion de singularité dans le cas du bord de l'ensemble. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ analytique dans $U$ avec un rayon de convergence $R = 1$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$. Le point $a$ est dit régulier s'il existe un disque $D(a,r)$ tel que $f$ admette un prolongement analytique sur $U \cap D(a,r)$, sinon on parle d'une singularité essentielle.

1) Montrer que si $a_n \geq 0$ pour tout $n$, alors $f$ a une singularité essentielle en 1.

2) On cherche à montrer que $f$ possède au moins une singularité essentielle sur le cercle unité. Pour cela, on raisonne par l'absurde.
a) Montrer qu'il existe alors $N$ disques $D(a_i,r_i)$ tels que $f$ admet un prolongement analytique $f_i$ à $U \cap D(a_i,r_i)$ et $\cup D(a_i,r_i)$ recouvre le cercle unité.
b) Obtenir alors un prolongement analytique de $f$ sur $V = U \cup (\cup D(a_i,r_i))$.
c) Conclure.

3) Est-ce qu'il existe un lien d'implication entre les deux propriétés : $z_0$ est une singularité essentielle et $f(z_0)$ diverge ?

4) Montrer que $\sum z^{n!}$ a tous les points du cercle unité comme singularité essentielle..

### Exercice 19 (Calcul d'intégrales à l'aide du Théorème des résidus)

1) En appliquant le Théorème des résidus au domaine délimité par les segments $[0,R]$, $[0, Re^{2i\pi/n}]$ et l'arc $\{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$, calculer $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx$ pour $n \geq 2$.

2) Calculer $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}a}\,dx$ en intégrant la fonction $e^{i\alpha z}/(\mathrm{ch}z + \mathrm{ch}a)$ le long du périmètre du rectangle ayant pour sommets $\pm R$, $\pm R + 2i\pi$.

**Exercice 20 (Prolongement et pôles)**

1) Montrer que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ est uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que sa somme $f(z)$ est holomorphe sur $\Omega$.

2) Pour $z \in \Omega$, on pose $h(z) = f(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Montrer que $h$ est la restriction à $\Omega$ d'une fonction holomorphe $H$ sur $\mathbb{C}$ qui vérifie $H(z+1) = H(z)$. Calculer $\lim_{y\to\infty} H(x+iy)$ et en déduire que $H = 0$.

3) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

---

## Compléments

**Exercice 21 (Phragmen-Lindelöf)**

1) Soit $f$ une fonction holomorphe au voisinage de la bande $Q = \{x+iy\,;\,|y| \leq \pi/2\}$ vérifiant
$i)\forall x \in \mathbb{R}, |f(x \pm i\pi/2)| \leq 1,$
$ii)\exists A > 0, \alpha < 1,$ tels que $\forall z \in Q$, $|f(z)| \leq \exp(A\exp(\alpha \mathrm{Re} z))$.
On veut montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in Q$. Pour $\varepsilon > 0$, $\alpha < \beta < 1$, on pose $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z}))$.
a) Vérifier que $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$.
b) Calculer $\lim_{x\to\infty} h_\varepsilon(x+iy)f(x+iy)$.
d) Montrer que $|h_\varepsilon(z)f(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$. (Utiliser le principe du maximum sur $Q \cap \{|x| \leq R\}$). Conclure.

2) Montrer que l'hypothèse $\alpha < 1$ ne peut être affaiblie (utiliser $f(z) = \exp(\exp(z))$).

**Exercice 22 (Fonction $\zeta$ de Riemann)**

Soit $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$. Montrer que holomorphe sur $\{Re z > 1\}$.

*Remarque 8 :* Ceci est un cas particulier de l'exercice 2 de la feuille sur les séries de Dirichlet. On verra plus tard dans l'année que la fonction $\zeta$ se prolonge en une fonction méromorphe admettant un unique pôle simple en 1. On sait aussi que $-2, -4, -6, \cdots$ sont des zéros de la fonction $\zeta$ et que les autres sont dans la bande $0 < Re z < 1$. La conjecture de Riemann est que tous ces zéros sont en fait sur la droite $Re z = 1/2$. (On sait déjà qu'il y en a une infinité dessus.) On étudiera aussi le prolongement de la fonction $\Gamma$ au plan complexe.

*Théorème 13, Théorème de Montel :* Soient $f_n \in H(\Omega)$ une famille uniformément bornée sur tout compact de $\Omega$ (appelée une famille normale). Alors on peut extraire une sous-suite de fontions holomorphes qui convergent uniformḿement sur tout compact.

*Remarque 9 :* Ce résultat se démontre à l'aide du théorème d'Ascoli et des inégalités de Cauchy.

**Exercice 23 (Fonction holomorphe sur une couronne)**

Soit $0 < r < R$, $\Omega = \{z\,;\, r < |z| < R$ et $f \in H(\Omega)$.

1) Soit $r < r_1 < r_2 < R$, on note pour $i = 1, 2$, $\gamma_i$ le cercle de centre 0 et de rayon $r_i$. Alors pour tout $z$ tel que $r_1 < |z| < r_2$, on a $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right)$.

2) En déduire que l'on peut décomposer $f$ de façon unique sous la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(1/z)$ avec $f_1 \in H(|z| < R)$ et $f_2 \in H(|z| < 1/r)$, $f_2(0) = 0$.

3) En déduire qu'il existe $(a_n)$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans $\Omega$ et vaut $f(z)$ (Développement de Laurent sur une couronne).

**Exercice 24 (Application du Théorème de Montel)**

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe $a$.

1) Montrer que les composées successives de $f$ forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors $f$ est une bijection de $\Omega$ dans $\Omega$.

Les énoncés suivants sont donnés à titre culturel, voir Rudin pour plus de détails :

*Théorème 14, Théorème de Rouché :* Soit $f, h \in H(\Omega)$ et $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ tels que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ si $|z - a| = r$. Alors $f$ et $g$ ont le même nombre de zéros dans $D(z_0, r)$. (Comptés avec leur multiplicité.)

*Théorème 15, Réciproque holomorphe :* Soit $\Omega$ un domaine, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ avec $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $V$ et $W$ des voisinages ouverts de $z_0$ et $w_0$ tel que $f$ est une bijection de $V$ sur $W$. Si $g$ est définie par $g(f(z)) = z$, on a alors $g \in H(W)$.

*Définition 9, Ouverts conforméments équivalents :* Les deux ouverts $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont dit conformément équivalents s'il existe $\varphi \in H(\Omega_1)$ bijection de $\Omega_1$ sur $\Omega_2$. (Alors par le théorème 15, $\varphi^{-1}$ est aussi holomorphe.)

*Théorème 16, Théorème de l'application conforme de Riemann :* Tout domaine simplement connexe non vide (autre que le plan lui-même) est conformément équivalent au disque unité ouvert.

On peut aussi s'intéresser aux fonctions harmoniques (équivalence avec propriété de la moyenne, noyau de Poisson et problème de Dirichlet). (Voir Rudin)

---

## Annexe : Exp, Log, ... complexes

On définit sur $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ homomorphisme analytique et surjectif de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$.
On définit alors les fonctions réelles cos et sin par $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$. Ceci permet de définir tan et les fonctions réciproques.
On pose maintenant, pour $z = x + iy$ de module 1 avec $x \neq -1$, $\Theta(z) = 2\text{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right)$. La fonction $\Theta$ est une bijection continue telle que $\exp(i\Theta(z)) = z$ pour tout $z \in S^1 \setminus \{1\}$.
La fonction Arg : $z \mapsto \Theta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ est la détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}^*$.
Si $\text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \in ]-\pi, \pi[$, alors on a $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$.
On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et sur $\Omega$, on définit la détermination prinipale du log complexe selon : $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg}(z)$. Cette fonction est une bijection holomorphe de $\Omega$ dans $\{x + iy\,;\, x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$.
On peut définir aussi les fonctions cos et sin complexes selon $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Attention, ces fonctions sont très différentes de leur restriction à $\mathbb{R}$, par exemple, elles sont surjectives.

**Bibliographie :**


- Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, ex 4, Rem 7 et de nombreux calculs d'intégrales par les résidus
- Chambert-Loir, Fermigier, Tome 2, ex 7, 12, 13, 18, 23 et 24
- Pommellet, ex 1, 6, 8, 11 et 22
- Rudin, Analyse réelle et complexe, ex 2, 3, 4, 5 ,6, 16, 17 et 21, Th 11 à 16 et Rem 6
- Tauvel, Exercices d'analyse complexe, ex 9, 14 et 19