Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Panorama et TD, Année 2005-2006
Intégrale à Paramètre.

Etude de $\int_a^b f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times U \to E$. On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 1, Résultat de continuité : On suppose que f est continue sur $[a,b] \times U$. Alors Φ est continue sur U.

Th. 2, Résultat de dérivation : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b] \times U$. Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Exercice 1 [Cours, Dvlpt] (Continuité et dérivation dans le cadre de Riemann)

1) On cherche à démontrer le Th. 1.

a) Rappeler la définition de l'uniforme continuité d'une application g entre deux espaces métriques (F,d) et (G,δ).

b) Soit $x \in U$ et V un voisinage compact de x dans U. Conclure en majorant $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|$ pour y assez proche de x dans V.

2) On cherche à démontrer le Th. 2.

a) Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour $g : [a,b] \to F$ avec F un e.v.n.

b) Soit $x \in U$ et $\alpha < \beta$ tels que $x \in [\alpha,\beta] \subset U$. Ecrire (après l'avoir justifier) l'uniforme continuité de $\partial_x f$ sur $[a,b] \times [\alpha,\beta]$.

c) A t fixé dans $[a,b]$, on définit $\Gamma_t(y) = f(t,y) - y\partial_x f(t,x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| \leq \eta$, alors $\|\Gamma_t(x) - \Gamma_t(y)\| \leq \varepsilon|x-y|$ pour tout $t \in [a,b]$.

En déduire une majoration de $\left\| \dfrac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - \int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt \right\|$ pour h assez petit, et conclure.

Remarque : cet exercice peut servir de développement pour les leçons 208 (Utilisation de la continuité uniforme) et 239 (Intégrale à paramètre).

Exercice 2 (Calcul d'une intégrale)

On pose $G(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x\sin^2\theta + y\cos^2\theta)\,d\theta$ pour $x, y > 0$.

a) Calculer les dérivées partielles de G.

b) A y fixé, on pose $F(x) = G(x,y)$. Montrer que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et obtenir que $F(x) = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + C$ pour $x \neq y$ avec C une constante..

c) En déduire la valeur de $G(x,y)$ pour tout $x, y > 0$.

Exercice 3 (Un exemple classique)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit $G :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$.

a) Quelle valeur faut-il pour $G(0)$ afin que G soit continue sur $[0,+\infty[$?

b) Exprimer G comme une intégrale dépendant du paramètre x et en déduire que G est C^∞ sur $[0,+\infty[$. Calculer $G^{(n)}(0)$.

Exercice 4 (Calcul de la Gaussienne)

Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définit par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que g est C^1 et en déduire un calcul de $g(x)$ en fonction de $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Etude de $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Riemann

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach, $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \times U \to E$. Soit $u, v : U \to]a,b[$.

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$.

Th. 3, Résultat de dérivation : On suppose que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $[a,b] \times U$. On suppose de plus que u et v sont dérivables.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = f(v(x),x)v'(x) - f(u(x),x)u'(x) + \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Exercice 5 [Cours] (Dérivation avec bornes variables)

On cherche à démontrer le Th. 3.

a) Soit $H :]a,b[^2 \times U \to E$ définie par $H(u,v,x) = \int_u^v f(t,x)\,dt$. Etudier les dérivées partielles de H. En déduire que H est différentiable sur $]a,b[^2 \times U$.

b) On pose $\theta(x) = (u(x), v(x), x)$. Exprimer Φ' en fonction de dH, θ et θ' et conclure.

Etude de $\displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$ pour une intégrale généralisée

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un espace de Banach, $[a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a,b[\times U \to E$.

On s'intéresse à la régularité de $\Phi : U \to E$ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dt$.

Th. 4, Résultat de continuité : On suppose que f est continue sur $]a,b[\times U$ et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|f(t,x)\| \leq g(t),\ \forall (t,x) \in]a,b[\times U$.
Alors Φ est bien définie et est continue sur U.

Th. 5, Résultat de dérivation : On suppose que $n = 1$, que f est continue et admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici x) telle que $\partial_x f$ soit continue sur $]a,b[\times U$. On suppose que pour tout $x \in U$, $\Phi(x)$ converge et qu'il existe une fonction positive g telle que $\int_a^b g$ converge et vérifiant $\|\partial_x f(t,x)\| \leq g(t),\ \forall (t,x) \in]a,b[\times U$.

Alors Φ est de classe C^1 sur U et $\Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \partial_x f(t,x)\,dt$ pour tout $x \in U$.

Remarque : On a rarement des majorations par une fonction g valables sur tout U. Comme la continuité et la dérivation sont des propriétés locales, il suffit d'avoir cette majoration localement pour conclure.

Exercice 6 [Cours] (Continuité et dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètre)

1) On cherche à démontrer le théorème 4.

a) Montrer que Φ est bien définie sur U.

b) Pour $a_n \to a$ et $b_n \to b$ avec $a < a_n < b_n < b$, montrer que $\int_{a_n}^{b_n} f(t,x)\,dt$ converge uniformément sur U vers $\int_a^b f(t,x)\,dt$.

c) Conclure.

2) Montrer de même le théorème 5.

Exercice 7 (Calcul d'une intégrale)

Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}\,dt$.

a) Montrer que G est bien définie, puis que G est dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $G'(x)$.

c) En déduire la valeur de G, puis celle de $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ pour $a, b > 0$.

Remarque : l'intégrale $I(a,b)$ peut aussi se calculer à l'aide de la première formule de la moyenne (voir Gourdon).

Annexe : Etude de $\int_a^b f(t,x)\,dt$ dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue

On rappelle les résultats suivants qui sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

Soit (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$, $(T, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : T \times X \to \mathbb{R}$.
On s'intéresse à la régularité de $\Phi : X \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = \int_T f(t,x)\,d\mu(t)$.

Th. 6, Résultat de continuité : On suppose que

i) pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,

ii) pour presque tout $t \in T$, f est continue au point x_0 par rapport à la variable x,

iii) il existe $g \in L^1_\mu$ tel que $|f(t,x)| \leq g(t)$, $\forall x \in X$, p.p. $t \in T$.

Alors Φ est continue en x_0.

Th. 7, Résultat de dérivation : On suppose que X est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et que

i) pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est $\mu-$ intégrable,

ii) pour presque tout $t \in T$, f admet sur X une dérivée partielle en x_0 par rapport à x,

iii) il existe $g \in L^1_\mu$ tel que $|\partial_x f(t,x)| \leq g(t)$, $\forall x \in X$, p.p. $t \in T$.

Alors $t \mapsto \partial_x f(t,x_0) \in L^1_\mu$, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = \int_T \partial_x f(t,x_0)\,d\mu(t)$.

Bibliographie :

- Gourdon (ex 4)
- Pommellet (ex 1, ex 6)
- Précis d'analyse-géométrie, tome 7 (ex 2 et 3)
- Ramis, Odoux, Deschamps, tome 4 (ex 5)
- Zuily, Queffélec (ex 7)

Remarque : D'autres séances feront intervenir les intégrales à paramètres, à savoir les séances sur la transformation de Fourier, la transformation de Laplace et les séances de développements : Méthode de Laplace, Prolongement de la fonction Γ d'Euler et Méthode de la phase stationnaire.