Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2005-2006

Séries de Dirichlet

Les séries de Dirichlet sont les séries de terme général $u_n(z) = \dfrac{a_n}{n^z}$ pour $n \geq 1$, avec $z, a_n \in \mathbb{C}$. On note $\Gamma_c = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \sum \dfrac{a_n}{n^x} \text{ converge}\}$, $\Gamma_a = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \sum \dfrac{a_n}{n^x} \text{ est absolument convergente}\}$, et σ_c la borne inf de Γ_c, σ_a la borne inf de Γ_a. On appelle σ_c l'abscisse de convergence de $\sum u_n(z)$ et σ_a l'abscisse de convergence absolue de $\sum u_n(z)$.

Exercice 1 (Convergence et convergence absolue)

1) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \frac{a_n}{n^{z_0}}$ converge absolument. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z > \mathcal{R}e\, z_0$, alors $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge absolument.

2) En déduire que :
a) si $\sigma_a = -\infty$, alors la série de Dirichlet converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$,
b) si $\sigma_a = +\infty$, alors la série de Dirichlet ne converge absolument pour aucun $z \in \mathbb{C}$,
c) si $\sigma_a \in \mathbb{R}$, alors la série de Dirichlet converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z > \sigma_a$ et ne converge absolument pour aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z < \sigma_a$.

3) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \frac{a_n}{n^{z_0}}$ converge. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z > \mathcal{R}e\, z_0$, alors $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge. (On posera $v_n = \frac{1}{n^{z-z_0}}$ et on montrera que $\sum |v_{n+1} - v_n|$ converge.)

4) En déduire que :
a) si $\sigma_c = -\infty$, alors la série de Dirichlet converge pour tout $z \in \mathbb{C}$,
b) si $\sigma_c = +\infty$, alors la série de Dirichlet diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$,
c) si $\sigma_c \in \mathbb{R}$, alors la série de Dirichlet converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z > \sigma_c$ et diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z < \sigma_c$.

5) Montrer que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$. Optimalité de ces inégalités ?

Exercice 2 (Holomorphie)

On note, pour $\mathcal{R}e\, z > \sigma_c$, $f(z)$ la somme de la série $\sum \frac{a_n}{n^z}$ avec $\sigma_c < +\infty$.

1) Montrer que f est holomorphe sur $\mathcal{R}e\, z > \sigma_c$.
(On pourra utiliser les notations de la question 3 de l'exercice 1 et majorer $|v_{n+1} - v_n|$ uniformément par rapport à z sur tout compact inclus dans $\{\mathcal{R}e\, z > \sigma_c\}$.)

2) Montrer que s'il existe $z_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e\, z_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ avec $f(z_k) = 0$ pour tout k, alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
(On pourra raisonner par l'absurde, et notant a_{n_0} le premier terme non nul, montrer qu'alors $\lim\limits_{k\to+\infty} n_0^{z_k} f(z_k) = a_{n_0}$).

3) Montrer que si $f \neq 0$, alors il existe $\alpha \geq \sigma_c$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $\mathcal{R}e\, z \geq \alpha$.

Exercice 3 (Produit de Dirichlet)

Soit $u_n(z) = \dfrac{a_n}{n^z}$ et $v_n(z) = \dfrac{b_n}{n^z}$ pour $n \geq 1$ et on pose $w_n(z) = \displaystyle\sum_{jk=n} u_j(z) v_k(z)$ pour $n \geq 1$.

1) Montrer que $\sum w_n(z)$ est une série de dirichlet, c'est-à-dire s'écrit sous la forme $\sum \frac{c_n}{n^z}$ où l'on déterminera c_n.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \frac{a_n}{n^z}$ converge absolument et $\sum \frac{b_n}{n^z}$ converge. Montrer qu'alors $\sum \frac{c_n}{n^z}$ converge et que la somme de la série produit est le produit des sommes des deux séries.
(On pourra poser pour $x \geq 1$, $V(x) = \displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{b_n}{n^z}$ et étudier $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{c_n}{n^z}$ où l'on fera apparaître V.)

3) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sum \frac{a_n}{n^z}$ et $\sum \frac{b_n}{n^z}$ convergent absolument. Montrer qu'alors $\sum \frac{c_n}{n^z}$ converge absolument et que la somme de la série produit est le produit des sommes des deux séries.

Bibliographie : Chambert-Loir, Fermigier et Zuily, Queffélec