

Pour  $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ , on définit (si l'intégrale existe) la transformée de Laplace de  $f$  en  $x$  par

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

**Exercice 1 [Cours](Transformée de Laplace de quelques fonctions)**

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :  $L(t \mapsto t^n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$ ,  $L(t \mapsto \cos(at))(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ ,  $L(t \mapsto \sin(at))(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$  et  $L(t \mapsto e^{at})(x) = \frac{1}{x - a}$ .

**Exercice 2 [Cours] (Convergence et convergence absolue)**

1) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $L(f)(x)$  est absolument convergente. Montrer que  $L(f)(y)$  est absolument convergente pour tout  $y > x$ .

2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $L(f)(x)$  est convergente. Montrer que  $L(f)(y)$  est convergente pour tout  $y > x$ .

3) On note

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R}; L(f)(x) \text{ converge.}\},$$

$$A(f) = \{x \in \mathbb{R}; L(f)(x) \text{ est absolument convergente.}\},$$

et  $c(f)$  la borne inf de  $C(f)$ ,  $a(f)$  la borne inf de  $A(f)$ .

Montrer que  $c(f) < a(f)$  est possible. (Utiliser la fonction  $f(t) = e^{ie^{4t}}$ .)

**Exercice 3 [Cours] (Régularités)**

1) On suppose que  $f$  est une fonction bornée de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'alors  $L(f)$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , que  $L(f) \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}, L(f)^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

2) On suppose que  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge. Montrer qu'alors  $L(f)$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $L(f)$  est continue en  $0^+$ . (On pourra poser  $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$  et faire une intégration par partie.)

**Exercice 4 (Application à un calcul d'intégrale)**

Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Exercice 5 (Théorème de Tauber sur la transformée de Laplace)**

On s'intéresse à la réciproque de la continuité de la question 2 de l'exercice 3. On suppose que  $L(f)(x) \rightarrow \alpha$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

1) Montrer que l'on n'a pas nécessairement la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

2) On suppose que  $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t}\right)$ . Montrer qu'alors  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

**Exercice 6 (Convolution et transformée de Laplace)**

Montrer que  $L(f * g)(x) = L(f)(x)L(g)(x)$ , pour  $x > \max(a(f), a(g))$ , où la convolution est définie par  $f * g(x) = \int_0^x f(u)g(x - u) du$ .

### Exercice 7 (Injectivité)

On suppose que pour tout  $x > 0$ ,  $L(f)(x) = 0$ . Montrer qu'alors  $f = 0$ .  
(On pourra poser  $h(u) = f(-\ln u)$  sur  $]0, 1]$  et montrer que  $\int_0^1 u^n (\int_1^u h) du = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et conclure en utilisant le théorème de Weierstrass).  
Le théorème de Lerch dit de plus que comme  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , alors on peut définir la transformée de Laplace inverse (de façon unique) via  $L^{-1}(L(f)) = f$ .

### Exercice 8 (Résolution d'une équation aux dérivées partielles)

On cherche à résoudre  $\partial_x U = 2\partial_t U + U$  avec la condition initiale  $U(0, x) = 6e^{-3x}$ . En faisant une transformée de Laplace par rapport à la variable  $t$  :  $u(y, x) = L(t \mapsto U(t, x))(y)$ , montrer que l'on est ramené, à  $y$  fixé, à résoudre l'équation différentielle  $\frac{du}{dx} - (2y + 1)u = -12e^{-3x}$ . Conclure.

### Exercice 9 (Equation de la chaleur)

Soit un solide représenté par  $0 < x < 1$ . Il est supposé en  $t = 0$  à la température  $3 \sin(2\pi x)$ . On le place en tout temps ultérieur à la température nulle en  $x = 0$  et en  $x = 1$ . L'évolution de la température suit la loi  $\partial_t U(t, x) = \partial_{xx}^2 U(t, x)$ . Déterminer  $U(t, x)$ .

*Remarque 1 : On peut aussi à l'aide de la transformée de Laplace, résoudre des équations intégrales  $f(t) = G(t) + \int_a^b K(u, t)f(u) du$  (si  $a$  et  $b$  sont constantes, on parle d'équation de Fredholm, si  $a$  est constante et  $b = t$ , on parle d'équation de Volterra), des équations intégro-différentielles du style  $f''(t) = f(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-u)f(u) du$ , des équations aux différences  $f(t) - 4f(t-1) + 3f(t-2) = t$ , des équations différentielles aux différences  $f'(t) = f(t-1) + 2t$ .*

### Exercice 10 [Dvlpt] (Problème Tautochrone)

Ce problème consiste à trouver la forme d'un fil, situé dans un plan vertical, sur lequel une perle enfilée glisse sans frottement de façon à ce que le temps mis pour atteindre le point le plus bas du fil soit indépendant de la position initiale de la perle.

1) On note  $P(u, v)$  la position initiale de la perle,  $O(0, 0)$  le point le plus bas et  $Q(x, y)$  un point intermédiaire. On note  $\sigma$  la longueur de l'arc  $OQ$ ,  $d\sigma/dt$  la vitesse instantanée de la perle en  $Q$  et  $T$  le temps pour aller de  $P$  à  $O$ . Comme la forme de la courbe est fixée, il existe une fonction  $F(y)$  telle que  $d\sigma = F(y)dy$ . Montrer que ce problème se ramène à résoudre  $\int_0^v \frac{F(y)}{(v-y)^{1/2}} dy = \sqrt{2g} T$  (équation intégrale de type d'Abel). (On pourra commencer, en utilisant la conservation de l'énergie, par montrer que  $\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)}$ .)

2) Résoudre l'équation intégrale d'Abel à l'aide de la transformée de Laplace. (On trouve que  $F(y) = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi} y^{-1/2}$ .)

3) Conclure que la courbe obtenue est une cycloïde (rappel : une paramétrisation de la cycloïde est  $x(t) = a(t + \sin t)$ ,  $y(t) = a(1 - \cos t)$ ).

*Remarque 2 : La transformée de Laplace est utile dans plusieurs leçons. Bien sur, dans la leçon sur les intégrales à paramètres, mais aussi dans la leçon de calculs d'intégrales (ex 3 indispensable), dans la leçon d'exemples d'équations différentielles (ex du style de l'exo 8) et dans la leçon sur l'étude des courbes (Dvlpt, Problème Tautochrone).*

### Bibliographie :

- Leichtmann, Schauer, tome 3 (ex 7)
- Pommellet (ex 2, 3, 4 et 5)
- Spiegel, Transformée de Laplace (ex 1, 6, 8, 9, 10 et ex sur la rem 1)