Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Travail Semaine Février, Année 2005-2006

Exercice 1 (CVU sur le bord)

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et $f_n \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\partial\Omega$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur Ω.

Exercice 2 (Théorème ergodique)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et de période $(0,1)$ et $(1,0)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t, \alpha t + b)\, dt = \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\, dx\, dy.$

Exercice 3 (Topologie et Algèbres normées)

Soit A une $\mathbb{R}-$ Algèbre munie d'une norme telle que $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$, unitaire et complète.

1) Montrer que si $x \in A$, $\|x\| < 1$, alors $1\!\!1_A - x$ est inversible dans A.

2) Montrer que $\{x \in A\,;\, x \text{ est inversible dans } A\}$ est un ouvert de A.

3) Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre. Montrer que φ est continue.

4) Soit E un $\mathbb{R}$ e.v. de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, u - \lambda Id \notin \mathcal{G}l_c(E)\}$ est compact.

Exercice 4 (Lemme de Milnor)

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, C un ouvert convexe borné tel que $K \subset C \subset \overline{C} \subset \Omega$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, on pose $u_t = Id + tu$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|t| < \alpha$, alors pour tout $x \in \overline{C}$, $du_t(x)$ est inversible.

2) Montrer que si $|t| < \alpha$, alors u_t est un C^∞-difféomorphisme de C sur son image.

3) Montrer que $\det(du_t(x))$ est de signe constant sur $]-\alpha, \alpha[\times C$.

4) On note λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $t \mapsto \lambda(u_t(C))$ est un polynôme sur $]-\alpha, \alpha[$ de degré $\leq n$.

Exercice 5 (Théorème de relèvement)

Soit $\varphi : [a,b] \to S^1$ continue.

1) Montrer qu'il existe $\tilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\varphi(t) = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$. On appelle $\tilde{\varphi}$ un relèvement de φ. Pour cela, on commencera par montrer que si $I_\varepsilon \subset [a,b]$ est un intervalle de longueur ε tel que $\varphi(I_\varepsilon)$ est de diamètre ≤ 1, alors sur I_ε, il existe un relèvement $\tilde{\varphi}_{I_\varepsilon}$.

2) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est unique à une constante de la forme $2\pi n$ près ($n \in \mathbb{Z}$).

3) Montrer que si φ est de classe C^k, alors $\tilde{\varphi}$ est de classe C^k.

Remarque : Ceci s'étend à $\varphi : X \to S^1$ où X est un e.m. connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe.

Exercice 6 (Continuité uniforme de l'intégrale de Riemann)

1) Soit (X, μ) un espace mesuré.

a) Soit $f \geq 0$ et intégrable de X dans $\mathbb{R}$. On pose $f_n = \inf(f, n)$. Montrer que $\int_X f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_X f$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout A mesurable tel que $\mu(A) < \delta$, alors $\int_A f\, d\mu \leq \varepsilon$.

2) On prend $X = \mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 7 (Théorème Maximal et théorème de dérivation de Lebesgue)

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Pour $r > 0$, on pose $M_r f(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)\,dy$. On définit la fonction maximale par $Mf(x) = \sup\limits_{r>0} M_r|f|(x)$. On note λ la mesure de Lebesgue.

1) a) Montrer que $(r,x) \mapsto M_r|f|(x)$ est continue.

b) Montrer que Mf est mesurable sur $\mathbb{R}^n$.

2) On pose $[f]_1 = \sup\limits_{t>0} t\lambda\{x\,;\,|f(x)| > t\}$.

a) Lemme : Si Ω est recouvert par des boules $B(x_j,r_j)$ et si $0 < c < |\Omega|$, alors il existe une suite finie de boules disjointes B_i de la famille $(B(x_j,r_j))$ telles que $c < 3^n \sum_{i=1}^k |B_i|$.

b) Soit $t > 0$. On pose $S = \{x\,;\,Mf(x) > t\}$. Pour tout $x \in S$, il existe $r_x > 0$ tel que $M_{r_x}|f|(x) > t$. Utiliser ceci pour montrer que $c < \frac{3^n}{t}[f]_1$ pour $c < |S|$.

c) Conclure au théorème maximal : $[Mf]_1 \leq 3^n [f]_1$.

3) On cherche à montrer maintenant que pour p.p. x, $\dfrac{1}{|B(x,r)|}\displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)\,dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.

a) Montrer que l'on peut se ramener à $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, hypothèse que l'on fera dans la suite.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f-u\|_1 < \varepsilon$. Montrer que $\lambda\{x\,;\,\overline{\lim\limits_{r\to 0}}|M_r f(x) - f(x)| > t\} \leq \frac{3}{t}\varepsilon(3^n+1)$.

c) En déduire que $\lambda\{x\,;\,\overline{\lim\limits_{r\to 0}}|M_r f(x) - f(x)| > t\} = 0$ pour tout $t > 0$ et conclure.

Remarque : Les points pour lesquels on a la convergence s'appelle les points de Lebesgue.

Exercice 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue via les translations)

1) Pour $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$ et $T_f(a) = \tau_a(f)$ application de $\mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{T})$. En utilisant la densité des fonctions continues dans $L^1(\mathbb{T})$, montrer que T_f est uniformément continue.

2) Après avoir montré que $2|c_n(f)| \leq \|f - \tau_{\pi/n}(f)\|_1$, conclure.

Indications :

Ex 1 : Critère de Cauchy et principe du maximum,
Ex 2 : Commencer par $f(x,y) = e^{2i\pi(nx+my)}$ puis par densité grace à Féjer,
Ex 3.3 : Si φ n'est pas identiquement nulle, montrer que $\varphi(\mathbb{1}_A) = 1$ et que si $\|x\| = 1$, alors $|\varphi(x)| < 1$ par l'absurde en utilisant le 3.1,
Ex 3.4 : Montrer que c'est un fermé, borné,
Ex 4.1 : utiliser le 3.1,
Ex 4.2 : Utiliser le th. d'inversion globale,
Ex 5.1 : Comme $\varphi(I_\varepsilon)$ est de diamètre < 2, on évite une demi-droite et peut trouver un log complexe. Ensuite, il faut recoller les différents intervalles,
Ex 7.2.a : Choisir un recouvrement fini de ω ouvert borné tel que $c < |\omega|$ $\overline{\omega} \subset \Omega$, puis par récurrence on choisit une boule B_{i+1} de rayon maximal qui ne rencontre pas $B_1 \cup \cdots \cup B_i$,
Ex 7.3.b : $\lambda\{x\,;\,\overline{\lim}|M_r f(x) - f(x)| > t\} \leq \lambda\{x\,;\,\overline{\lim}|M_r f(x) - M_r u(x)| > t/3\} + \lambda\{x\,;\,\overline{\lim}|M_r u(x) - u(x)| > t/3\} + \lambda\{x\,;\,\overline{\lim}|u(x) - f(x)| > t/3\}$ et penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Bibliographie :

- Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation (ex 4 et 8)
- Chambert-loir, Fermigier (ex 2, 5, 6)
- Gourdon (ex 3)
- Willem, Analyse Harmonique réelle (ex 7 et 8)