Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Travail Semaines Noël, Année 2005-2006

Fonctions harmoniques.

- Rattraper le retard des exercices non faits (équa diff, holomorphe, ...)
- Faire des fiches des nouveaux développements faits
- Faire des fiches des leçons où on peut déjà classer les exercices fait en Td à ne pas oublier.

On note B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité. On note $d\sigma$ la mesure d'aire sur la sphère.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite harmonique sur U si elle est de classe C^2 et si $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} = 0$.

Exercice 1 (n=2, lien avec holomorphie)

Dans le cas $n = 2$, on note (x, y) les points de $\mathbb{R}^2$ et on définit les opérateurs $\partial = (\partial_x - i\partial_y)/2$ et $\overline{\partial} = (\partial_x + i\partial_y)/2$.

1) Pour f holomorphe, montrer que $f'(z) = (\partial f)(z)$.

2) Pour f de classe C^2, montrer que $\Delta f = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f = 4\partial\overline{\partial} f$.

3) En déduire que si f est holomorphe, alors f est harmonique.

Exercice 2 (Principe du maximum pour les fonctions harmoniques)

1) Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et de classe C^2 sur B telle que $f|_S \leq 0$ et $\Delta f \geq 0$. On suppose qu'il existe $\xi \in B$ tel que $f(\xi) > 0$.

a) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la fonction $x \mapsto f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ atteint son maximum en un point $x_0 \in B$.

b) Montrer que $\Delta f(x_0) \leq 0$.

2) Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue sur $\overline{B}$ et harmonique sur B. Montrer que $\min_S f = \min_{\overline{B}} f$ et $\max_S f = \max_{\overline{B}} f$

Exercice 3 (Représentation intégrale des fonctions harmoniques)

On définit le noyau de Poisson par $k(x, y) = c\,\frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}$ pour $x \in B$, $y \in S$.

1) Montrer que k est harmonique en la variable x.

2) Soit $k_0(x) = \int_S k(x, y)\, d\sigma(y)$. Montrer que k_0 est harmonique dans B.

3) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On définit f sur B selon $f(x) = g(\|x\|)$. On suppose que f est de classe C^2 et harmonique. Montrer que g est de classe C^2, calculer g. Si f est bornée, montrer qu'elle est constante. En déduire que l'on peut choisir c tel que $k_0 = 1$.

4) Soit $f : S \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi(x) = \int_S f(y)k(x, y)\, d\sigma(y)$.

a) Montrer que φ est de classe C^2 sur B et harmonique.

b) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur $\overline{B}$ et est égale à f sur S.

5) Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est harmonique sur B. Montrer que pour tout $x \in B$, $f(x) = \int_S f(y)k(x, y)\, d\sigma(y)$.

Exercice 4 (Résolution de $-\Delta u = f$)

On pose $\phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x\|$ pour $n = 2$ et $\phi(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)\|x\|^{n-2}}$ pour $n \geq 3$, où $\alpha(n)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On définit $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y) f(y)\, dy$.

1) Montrer que u est harmonique sur $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que $\Delta u = I_\varepsilon + J_\varepsilon$ où $I_\varepsilon = \int_{B(0,\varepsilon)} \phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ et $J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy$.

3) On note $K_\varepsilon = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \phi(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)\,d\sigma(y)$. En faisant une IPP sur J_ε et sur $J_\varepsilon - K_\varepsilon$, montrer que $J_\varepsilon - K_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -f(x)$ et conclure.

Exercice 5 (Harmonicité et formule de la moyenne)

On note $⨏_V f = \frac{\int_V f}{\mathrm{Vol}(V)}$ pour tout ouvert $V \subset U$.

1) On note $\varphi(r) = ⨏_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,d\sigma(z)$. Montrer que $\varphi'(r) = \frac{r}{n} ⨏_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy$ à l'aide de la formule de Green.

2) Soit u de classe C^2 sur U. La fonction u est harmonique sur U si et seulement si $u(x) = ⨏_{\partial B(x,r)} u(y)\,d\sigma(y) = ⨏_{B(x,r)} u(y)\,dy$ pour toute boule $B(x,r) \subset U$.

Annexe : *Rappel sur l'IPP et la formule de Green dans* $\mathbb{R}^n$.
On note ν la normale sortante à U. (On suppose qu'une telle normale existe ...)
Pour $u \in C^1(\overline{U})$, on a $\int_U \partial_{x_i} u\,dx = \int_{\partial U} u\nu^i\,d\sigma$. (Formule de Gauss-Green).
De ce résultat, on déduit facilement les formules suivantes :
Intégration par partie : Soient $u, v \in C^1(\overline{U})$, on a $\int_U v\,\partial_{x_i} u\,dx = -\int_U u\,\partial_{x_i} v\,dx + \int_{\partial U} uv\nu^i\,d\sigma$.
Green : Soient $u, v \in C^2(\overline{U})$, on a $\int_U \Delta u\,dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma$, $\int_U Du \cdot Dv\,dx = -\int_U u\,\Delta v\,dx + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial \nu} u\,d\sigma$ et $\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma$.

Bibliographie :

- Chambert-loir, Fermigier
- Evans, Partial Differential Equations
- Gourdon
- Rudin