Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Travail Semaine Toussaint, Année 2005-2006

Suites, séries et intégrales.

- Rattraper le retard des exercices non faits
- Faire des fiches des développements déjà faits :
  1) Comparaison série-intégrale et série harmonique
  2) Inégalité de Carlemann
  3) Utilisation des séries : Stirling via Wallis et Equivalent de restes
  4) Calcul de sommes, d'intégrales et de suites à l'aide de séries entières
  5) Continuité et dérivabilité dans le cadre de Riemann
  6) Théorème de Borel
  7) Une fonction continue partout, dérivable nulle part
  8) Formule sommatoire de Poisson
  9) Théorème de Cauchy-Lipschitz
  10) Produit de séries et Théorème de Cauchy-Mertens
- Faire des fiches des leçons où on peut déjà classer les exercices fait en Td à ne pas oublier.
- Faire les exercices suivants :

Exercice 1

Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 2

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ positive. On pose $\|f\|_n = \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty$.

Exercice 3

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T périodique. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\phi(nt)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \phi(t)\,dt\right)\left(\int_a^b f(t)\,dt\right).$$

(On commencera par le cas où $f = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}$ avec $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.)

Exercice Corrigé (Théorème de Césaro)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle qui converge vers l. On définit la suite de Césaro selon $c_n = \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ pour $n \geq 1$. Le théorème de Césaro dit que la suite (c_n) est également convergente de limite l.

La preuve est la suivante : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k \geq N$, alors $|a_k - l| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned}
|c_n - l| &= \left|\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{a_1+\cdots+a_{N-1}-(N-1)l}{n}\right| + \left|\frac{(a_N-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right| \\
&\leq \frac{C_N}{n} + \varepsilon\frac{n-N+1}{n} \leq \frac{C_N}{n} + \varepsilon,
\end{aligned}$$

avec $C_N = a_1+\cdots+a_{N-1}-(N-1)l$. Comme N est fixé, C_N est une constante donc il existe $N_1 \geq N$ tel que $C_N/n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N_1$. Et donc $|c_n - l| \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq N_1$.

Cette technique (très classique) va être utile dans les deux exercices suivants.

Exercice 4 (Césaro modifié)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers l. Etudier la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ où $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Exercice 5 [Dvlpt] (Produit de séries et Théorème de Cauchy-Mertens)

On rappelle que le produit de convolution de deux séries $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ est définie par la série $(w_n)_{n\geq 0}$ telle que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. On note U_n, V_n et W_n les sommes partielles correspondantes et U, V et W les sommes des séries correspondantes lorsqu'elles convergent.

1) Cas de deux séries absolument convergentes. On va montrer qu'alors la série produit est aussi absolument convergente et que $UV = W$.

a) Montrer ce résultat dans le cas où $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. (On pourra commencer par prouver que $W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}$).

b) Montrer le cas général.

2) Cas où une des deux séries est absolument convergente (disons (u_n)) et l'autre seulement semi-convergente. On va montrer qu'alors la série produit est convergente et que $UV = W$. (Théorème de Cauchy-Mertens).

a) On suppose que $V = 0$. En s'inspirant de la technique de Césaro, conclure dans ce cas.

b) Traiter le cas général.

3) Cas de deux séries convergentes tel que la série produit converge. Alors on a $UV = W$. On va fournir deux preuves pour ce résultat.

a) Première méthode : à l'aide du théorème de Césaro en montrant tout d'abord que $\dfrac{U_0 V_n + \cdots + U_n V_0}{n+1} = \dfrac{W_0 + \cdots + W_n}{n+1}$.

b) Seconde méthode : à l'aide du théorème d'Abel sur les séries entières en posant $f(x) = \sum u_n x^n$, $g(x) = \sum u_n x^n$ et $h(x) = \sum u_n x^n$ et en prouvant tout d'abord que $f(x)g(x) = h(x)$ sur $]0,1[$.

4) Donner un exemple de séries telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et $\sum w_n$ diverge.

Exercice 6 (Séries de Fourier à coefficients positifs)

Soit a_n une suite réelle décroissante et de limite nulle. On pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$.

1) Montrer que S_n converge uniformément sur tout $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ avec $0 < \alpha < \pi$.

2) Montrer que S_n converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ si et seulement si $na_n \to 0$.

Exercice 7 (Approximation classique de l'exponentielle)

1) Montrer que $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$.
(Pour cela on étudiera les variations de $e^{-x} - f_n(x)$.)

2) Montrer que $f_n(z) = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément vers e^z sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(On pourra remarquer que $\dfrac{1}{k!} - \dfrac{C_n^k}{n^k} \geq 0$.)

Exercice 8 (Intégrales généralisées et limites à l'infini)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1) On suppose que f a une limite l en $+\infty$. Montrer que $l = 0$.

2) On suppose que f est uniformément continue. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

3) On suppose que f est de classe C^1 et telle que $\int_0^{+\infty} (f')^2(t)\, dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

4) On suppose que f est décroissante. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9 (CVS, CVU et CVN)

On pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ mais que la convergence n'est pas normale.

Exercice 10 (M-test de Weierstrass et Théorème de Tannery)

1) Montrer que si $(s_n(x))$ est une suite de fonctions telle que $|s_n(x) - s_{n+1}(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in E$ avec $\sum M_n$ convergente, alors $(s_n(x))$ converge uniformément sur E. (M-test de Weierstrass)

2) On suppose que $f_n(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $|f_n(k)| \leq M_n$ pour tout k avec $\sum M_n$ convergente. Si $p(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f_1(k) + \cdots + f_{p(k)}(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L_n$. (Théorème de Tannery)

Indications :

Exercice 5 : Pour le 2) a), $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon$. Pour le 2) b), $v_0 \to v_0 - V$ et $w_n \to w_n - V u_n$.

Exercice 6 : Pour le 1), on posera $s_n(x) = \sin x + \cdots + \sin(nx)$ et on fera une transformation d'Abel sur S_n. Pour le 2), on montrera que pour $x = \pi/(2n)$, on a $S_n(x) - S_{[n/2]}(x) \geq \sin(\pi/4)(a_{1+[n/2]} + \cdots + a_n)$.

Exercice 8 : Penser au critère de Cauchy.

Exercice 9 : Pour le 1), on s'intéressera à des sommes du style $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{2p} u_n(x)$. Pour le 2), on montrera que $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \leq \frac{1}{p}$.

Bibliographie :

- Boas, A primer of real functions (ex 10)
- Chambert-loir (ex 6)
- Gourdon (ex 2, 3, 7 et 9)
- Pommellet (ex 5 et 8)