Université de Nice
Préparation à l'agrégation (2006-2007)
Algèbre: Feuille 1
SOLUTION

Exercice I
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes:

a) $\dfrac{(x-1)^3}{x^2-4} = x - 3 + \frac{1}{4(x-2)} + \dfrac{27}{4(x+2)}$

b) $\dfrac{x^4+4}{x^4-4} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} - \dfrac{1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} - \dfrac{2}{x^2+2}$

$= 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} - \dfrac{1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} - \dfrac{1}{i\sqrt{2}(x-i\sqrt{2})} + \dfrac{1}{i\sqrt{2}(x+i\sqrt{2})}$

c) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)} = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3(x-1)} + \dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$

$= -\dfrac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} + \dfrac{1}{3(x-j)} + \dfrac{1}{3(x-j^2)}$

d) $\dfrac{2x(2x^2+1)}{x^4+x^2+1} = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{x-j^2} + \dfrac{1}{x+j} + \dfrac{1}{x+j^2}$

$= \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

Exercice II
Décomposer en eléments simples la fraction rationnelle (dans laquelle $n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{n!}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{x-k}$$

Exercice III
Décomposer en eléments simples la fraction rationnelle (les b_j sont distincts ainsi que les a_k)

$$\frac{(b_1-x)(b_2-x)\dots(b_{n-1}-x)}{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x+a_k} \text{ avec } \lambda_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_j+a_k)}{\prod_{j\neq k}(a_j-a_k)}$$