Université de Nice
Préparation à l'agrégation (2006-2007)
Algèbre: Feuille 2 (groupes finis)

Puisque ces mystères nous dépassent, feignons
d'en être les organisateurs (Jean Cocteau)

I) Un groupe abélien dont tous les éléments sont d'ordre fini est-il fini?
[Penser aux $\mathbb{Z}/(2)$ espaces vectoriels]

II) Montrer que si un groupe G vérifie $Aut(G) = \{Id\}$, alors G est trivial ou a deux éléments.
[Prouver que G est commutatif, que $g = g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et que G est un $\mathbb{Z}/(2)$ espace vectoriel]

III) Prouver qu'un groupe qui n'a qu'un nombre fini de sous-groupes est fini.

IV) Si un groupe est abélien, tous ses sous-groupes sont normaux . La réciproque est-elle vraie?
[Non, le groupe quaternionien H_8 est non-abélien mais a cette propriété. Vérifiez-le.].
Le groupe diédral D_4 (d'ordre 8) a-t-il tous ses sous-groupes normaux?

V) Prouver que H_8 n'est pas (de manière non-triviale) un produit semi-direct. Quid de D_4?

VI) Quel est le centre du groupe symétrique S_n?
Du groupe diédral D_n ? (Pour D_n, distinguer les cas n pair et n impair)

VII) Calculer tous les morphismes de S_3 vers $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$

VIII) Prouver que le groupe alterné A_4 n'est pas simple en en explicitant un sous-groupe normal.

IX) La formule de conjugaison $\sigma(x, y, z)\sigma^{-1} = (\sigma x, \sigma y, \sigma z)$ semble prouver que tous les tricycles de A_4 sont conjugués . Prouver que cette assertion est fausse et élucider ce paradoxe.