

**Exercice 1 (Un théorème)**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante, positive.

1) Montrer que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $\sum f(k)$  converge.

2) Si  $\sum f(k)$  diverge, montrer que  $\sum_{k=0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^{n+1} f(t) dt$ .

3) Si  $\sum f(k)$  converge, montrer que  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$  n'est pas forcément équivalent à  $\int_n^{+\infty} f(t) dt$ .

Par contre, si  $f(n) = o(R_n)$ , alors montrer que c'est vrai.

**Exercice 2 (Quelques comparaisons séries-intégrales)**

1) Trouver un équivalent de  $A_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  pour  $\alpha > 1$ .

2) Trouver un équivalent de  $S_n = \sum_{k=1}^n k \ln^2 k$ .

3) Trouver un équivalent de  $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$  pour  $\alpha > -1$ .

**Exercice 3 (Différence entre Intégrales et séries)**

Donner un exemple de fonctions  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telles que

a)  $\int_0^{+\infty} f$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$  diverge, b)  $\int_0^{+\infty} f$  diverge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$  converge, c)  $\int_0^{+\infty} f$

converge,  $f$  non bornée et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$  diverge.

**Exercice 4 (Intégration par paquets)**

Soit  $a \geq 0$ ,  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On pose  $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$  où  $x_n$  est une suite croissante telle que  $x_0 = a$  et qui tend vers  $+\infty$ .

1) Montrer que si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.

2) Montrer que la réciproque est fautive.

3) Montrer que si  $\sum u_n$  converge et si  $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)| dt \rightarrow 0$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge. A quel résultat cela vous fait-il penser ?

4) Application 1 : Etude de la divergence de  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$  si  $\alpha \leq 1$ .

5) Application 2 : Montrer que si  $f$  est positive et décroissante vers 0 à l'infini, alors  $\int_0^{+\infty} f(t) \sin t dt$  converge. Connaissez-vous une autre preuve de ce résultat ?

### Exercice 5 ("Sommes infinies de Riemann")

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, décroissante et telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

1) Montrer que  $f$  reste positive.

2) Montrer que  $h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt$  quand  $h$  tend vers 0.

### Exercice 6 (Aparté sur les séries)

1) Énoncer et démontrer la règle de Raabe-Duhamel.

2) Énoncer et montrer le lien entre la règle de Cauchy et celle de D'Alembert.

Bibliographie : Pommellet (ex 1 et 4, partiellement aussi les autres), Gourdon (ex 6)