COMPACITE.

Ex. 1 : Un théorème de point fixe. Soit (X, d) un espace métrique compact. On suppose $f : X \to X$ telle que $\forall x,\, y \in X,\, x \neq y,\, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

1) Montrer que f est continue, et, en étudiant $\inf_{x\in X} d(x, f(x))$, montrer que f admet un point fixe, puis que celui-ci est unique. On le note α.

2) Fixons $x_0 \in X$, et considérons la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$. Vérifier que $\big(d(\alpha, x_n)\big)_n$ est décroissante : on note $\ell \geq 0$ sa limite. Soit $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de $(x_n)_n$ convergente vers x dans X. Montrer que d'une part $d(\alpha, x_{n_k}) \to d(\alpha, x) = \ell$, et d'autre part $d(\alpha, x_{n_k+1}) \to \ell = d(\alpha, f(x)) = d(f(\alpha), f(x))$. Conclure alors que $\alpha = x$ et $\ell = 0$, *i.e.* $x_n \to x$ dans X.

3) Vérifier avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ que l'hypothèse "X compact" est essentielle.

Ex. 2 : Théorème de Riesz. Soit E un espace vectoriel normé. On souhaite montrer le théorème de Riesz : $\bar{B}(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

1) Pourquoi ceci est-il vrai quand E est de dimension finie ?

2) On suppose E de dimension infinie (*i.e.* E n'est pas de dimension finie). On suppose E inclus dans une réunion finie de boules ouvertes $B(a_i, 1)$, $1 \leq i \leq n$. Soit $F = \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_n)$. Justifier l'existence de $x \in E$ tel que $x \notin F$. Pourquoi existe-t-il $y \in F$ tel que $d(x, F) = ||x - y|| > 0$? En notant $x_0 = \frac{x-y}{||x-y||}$, démontrer que $d(x_0, F) \geq 1$. Montrer par ailleurs qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $||x_0 - a_i|| < 1$. Conclure.

3) *Cas pré-hilbertien.* On suppose $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ pré-hilbertien de dimension infinie. Construire par récurrence une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ orthonormée. On suppose que $(e_{n_k})_k$ est une sous-suite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge dans E vers x. Montrer que $||x|| = 1$. Vérifier que $||x||^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} \langle x, e_{n_k}\rangle$, puis que pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\langle x, e_{n_k}\rangle = \lim\limits_{j\to+\infty} \langle e_{n_j}, e_{n_k}\rangle = 0$. Conclure.

Ex. 3 : Base d'Auerbach. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n. On souhaite montrer qu'il existe une base $(e_1, e_2, ...e_n)$ de E normée telle que sa base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$ soit aussi normée. Pour cela, on note $S = \{x \in E,\ ||x|| = 1\}$, et on considére une base $\mathcal{B}$ normée de E fixée. Justifier l'existence d'un maximiseur, noté $(e_1, ..., e_n)$, de l'application $S^n \ni (x_1, ..., x_n) \mapsto |\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)|$. Vérifier que $(e_1, ..., e_n)$ est une base, dont on note $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale. Vérifier aussi que $||e_1^*|| \geq 1$. Soit $x \in S$, $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Calculer $|\det_{\mathcal{B}}(x, e_2, ..., e_n)|$ en fonction de x^1 et $|\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, ..., e_n)|$, et déduire que $|x^1| \leq 1$, donc $||e_1^*|| = 1$. Conclure.

Ex. 4 : Idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Soit (X, d) un espace métrique compact.

1) Vérifier que si $y \in X$, l'ensemble $\mathcal{I}_y = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),\ f(y) = 0\}$ est un idéal maximal de l'anneau $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. On pourra introduire $\delta_y : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \ni f \to f(y) \in \mathbb{R}$.

2) Réciproquement, soit J un idéal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $J \neq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
a) On suppose que $J \not\subset \mathcal{I}_y$ pour aucun $y \in X$, *i.e.* $\forall y \in X,\ \exists f_y \in J,\ f_y(y) \neq 0$. Montrer alors

que $X = \bigcup_{y\in X} f_y^{-1}(\mathbb{R}^*)$, puis qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, y_1, ... , $y_k \in X$ tels que $X = \bigcup_{1\le i\le k} f_{y_i}^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Justifier alors que $f = \sum_{i=1}^k f_i^2 \in J$ et ne s'annule pas, et conclure que $J = \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. En déduire que $\exists y \in X,\ J \subset \mathcal{I}_y$.
b) Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ sont les $\mathcal{I}_y$, $y \in X$. En déduire que les morphismes d'algèbre $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont les $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \ni f \mapsto f(y) \in \mathbb{R}$, pour $y \in \mathbb{R}$.
c) Vérifier que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un idéal strict (ou propre) de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui n'est inclus dans aucun idéal $\mathcal{I}_y$, $y \in \mathbb{R}$. Tous les idéaux maximaux de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-ils des $\mathcal{I}_y$?

Ex. 5 : Espaces de suites. On travaille dans $(c_0, |\cdot|_{\ell^\infty})$, où c_0 est l'ensemble des suites complexes de limite nulle. Pourquoi est-ce un Banach ?

1) Soit $A \subset c_0$ une partie fermée. On souhaite montrer que A est compacte si $\lim_{+\infty} u = 0$ uniformément pour $u \in A$, *i.e.* :

$$A \text{ est compacte} \iff \exists f \in c_0,\quad f \ge 0,\quad \forall u \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \le f_n.$$

a) $\Rightarrow$ Vérifier que A est bornée. On note alors $f_n = \sup_{u\in A} |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$. Recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon ε, et en déduire que $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge N$ et $u \in A$, $|u_n| \le 2\varepsilon$. Conclure que $f \in c_0$.
b) $\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \le \varepsilon$ si $n > N$. Vérifier que $K \equiv \{(u_0, ..., u_N),\ u \in A\}$ est un compact de $\mathbb{R}^{N+1}$. En déduire qu'il existe $v^1, ..., v^p \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B_\infty(v^i, \varepsilon)$. En notant $\tilde{v}^i$ le prolongement de v^i par 0 pour $n > N$, montrer que $A \subset \bigcup_{i=1}^p B_\infty(\tilde{v}^i, \varepsilon)$ et conclure.
c) $\Leftarrow$ (autre preuve) Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans A. Déduire de $|u_0^k| \le f_0$ qu'il existe une extraction $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_0^{\varphi_0(k)})_k$ converge, de limite notée u_0. Puis, montrer qu'il existe une extraction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_1^{\varphi_0\circ\varphi_1(k)})_k$ converge, de limite notée u_1... idem pour n. Vérifier alors que $\varphi(k) \equiv \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(k)$ est une extraction, appelée *extraction diagonale*, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n^{\varphi(k)})_k$ converge vers u_n, et $|u_n| \le f_n$, donc $u \in c_0$. Soit enfin $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, $|u_n - u_n^{\varphi(k)}| \le \varepsilon$. Conclure alors que $u^{\varphi(k)} \to u$ dans c_0.

2) Si $1 \le p < \infty$, on travaille dans $\ell^p(\mathbb{N}^*) = \{\text{suites } u,\ \sum_{n\ge1} |u_n|^p = |u|_{\ell^p}^p < \infty\}$. On considère, pour $A \subset \ell^p$ fermée, la propriété

$$(*) \qquad \exists f \in \ell^p,\quad f \ge 0,\quad \forall u \in A,\ \forall n \ge 1,\ |u_n| \le f_n.$$

a) Vérifier que si $(*)$ est vraie, A est compacte en suivant **1)** *b)* ou *c)*.
b) Montrer que si A est compacte, $(*)$ n'est pas nécessairement vraie. On pourra envisager la suite $(u^k)_k$ définie par $u_n^k = n^{-\frac{1}{p}}\delta_{k,n} = n^{-\frac{1}{p}}$ si $n = k$ et $= 0$ sinon.

3) On considère l'opérateur de Césaro : $T : \ell^\infty(\mathbb{N}^*) \to \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ défini pour $u \in \ell^\infty$ pour $u \in \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ et $n \ge 1$ par $(Tu)_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_j$. Vérifier que T est bien défini. Etant donné $1 < p < \infty$, vérifier que $T : \ell^1 \to \ell^p$ est bien défini, puis que $T(B_{\ell^1}(0,1)) \subset \ell^p$ est d'adhérence compacte (*i.e.* relativement compact). Justifier que $T(c_0) \subset c_0$. L'ensemble $T(B_{c_0}(0,1)) \subset c_0$ est-il relativement compact dans c_0 ?

Ex. 6 : Distance de Hausdorff. X. Gourdon, p. 59, et Chambert-Loir & al., *Exercices d'Analyse - I*, Ex. 2.8 p. 39.

Références :

• X. Gourdon, **Ex. 1** (p. 34), **Ex. 2** (p. 56), **Ex. 4** (p. 37) et **Ex. 6** (p. 59).
• S. Francinou, H. Gianella, *Exercices d'Analyse pour l'Agrégation (Algèbre 1).* Masson. **Ex. 4** (Ex. 2. 30, p. 74).
• Zuily-Queffellec, **Ex. 3** (p. 160) et **Ex. 5** (Ex. 19 p. 179).