Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

Corrigé succint du TD: Théorèmes de point fixe

Exercice 2: (a) Posons $G = \{g_1, ..., g_p\}$, avec $p \geq 1$. Soit $x_0 \in K$ et soit $x = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i.x_0$. L'ensemble K est convexe, donc $x \in K$. On obtient alors immédiatement que $g.x = x$ pour tout $g \in G$.

(b) Clairement, $\|\cdot\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $x, y \in E$ et soit $g \in G$. On a

$$\|g.(x+y)\|_2 = \|g.x + g.y\|_2 \leq \|g.x\|_2 + \|g.y\|_2 \leq \|x\| + \|y\|.$$

En prenant le sup sur tous les $g \in G$, on trouve $|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$. Du coup, $\|\cdot\|$ est une norme. Soit $x \in E$ et soit $g_0 \in G$. On a $\|g.x\| = \sup\{\|(gg_0).x\|_2/\, g \in G\} = \|x\|$, et les éléments de G sont des isométries pour cette norme. (c) Soit $x_0 \in E$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on pose $x_N = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} \phi^i(x_0)$. Comme K est convexe, $x_N \in K$ pour tout $N \geq 1$ et on a $\phi(x_N) = x_N + \frac{\phi^{N+1}(x_0) - x_0}{N}$. Comme K est compat, on extrait une sous-suite $x_{N'}$ qui converge vers $x \in K$. Sachant que ϕ est à valeurs dans K borné, on trouve, à la limite, que $\phi(x) = x$. Donc ϕ a un point fixe dans K.

(d) On a un recouvrement ouvert $K = \bigcup \Omega_g$ dont on extrait un recouvrement fini $K = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{g_i}$. On pose $\phi \in L_c(E)$ telle que $\phi(x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i.x$ pour $x \in E$. Comme $\phi(K) \subset K$, il suit de (c) qu'il existe $x \in K$ tel que $\phi(x) = x$. Comme les éléments de g sont des isométries pour $\|\cdot\|$, on a

$$\|x\| = \|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} g_i.x\| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \|g_i.x\| \leq \|x\|.$$

Écrivons $x = \sum_{i=1}^{p} y_i$ avec $y_i = \frac{1}{p} g_i.x$. Soit $g \in G$ tel que $\|x\| = \|g.x\|_2$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} \|g.y_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{p} \|y_i\| = \|x\| = \|g.x\|_2 \leq \sum_{i=1}^{p} \|g.y_i\|_2$$

On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire euclidienne, du coup, pour tout i, il existe $\lambda_i \geq 0$ tel que $g.y_i = \lambda_i g.x$. En passant à la norme $\|\cdot\|$, on obtient $\lambda_i = 1/p$ pour totu i, et du coup $g_i.x = x$ pour tout i. Du coup $x \notin \Omega_{g_i}$ pour tout i, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve le résultat demandé.

Exercice 3: Soit la forme quadratique $q_0(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. On prend $E = \{\text{formes quadratiques sur } \mathbb{R}^n\}$ et $K = \overline{\text{Conv}\ \{q_0 \circ g/\, g \in G\}}$. Le groupe G se plonge dans $Gl(E)$ par $g \mapsto (q \mapsto q \circ g)$. On applique alors le théorème de l'exercice 2 pour obtenie $q \in K$ telle que $q \circ g = q$ pour tout $g \in G$, cad $G \subset O(q)$.

Exercice 4: (a) Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(0) = e^{i\theta_0}$. Soit $\phi :]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[\to \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{i\theta_0}\}$ telle que $\phi(\theta) = e^{i\theta}$ pour $\theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$. On a ϕ homéomorphisme (fait en TD). Soit $\epsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{e^{i\theta_0}\}$ pour $t \in [0, \epsilon]$: on pose alors $\varphi(t) = \phi^{-1}(\gamma(t))$ pour $t \in [0, \epsilon]$. La fonction φ est alors continue sur son domaine de définition. On pose alors

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1]/\ \varphi \text{ se prolonge à } [0,t] \text{ et } \gamma = e^{i\varphi} \text{ sur } [0,t]\}.$$

Clairement, on peut alors définir $\varphi \in C^0([0,t_0[)$ telle que $\gamma(t) = e^{i\varphi(t)}$ pour $t \in [0,t_0[$. Soit $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t_0) = e^{i\theta_1}$. De même que précédement, il existe $\epsilon' > 0$, il existe $\varphi' \in C^0(]t_0-\epsilon', t_0+\epsilon'[\cap[0,1])$ telle que $\gamma(t) = e^{i\varphi'(t)}$ pour tout $t \in]t_0-\epsilon', t_0+\epsilon'[\cap[0,1]$. On en déduit que $e^{i\varphi(t)} = e^{i\varphi'(t)}$ pour tout $t \in]t_0-\epsilon', t_0[$, et du coup, $\varphi(t) - \varphi'(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $t \in]t_0-\epsilon', t_0[$. Par connexité, il existe alors $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(t) = \varphi'(t) + 2\pi n_0$ pour tout $t \in]t_0-\epsilon', t_0[$. On prolonge alors φ par $\varphi'(t) + 2\pi n_0$ sur $[t_0, t_0+\epsilon'[\cap[0,1]$. Il suit alors que $t_0 = 1$ et que φ se prolonge continuement à $[0,1]$ entier.

(b) Si une fonction φ' convient aussi, alors on a $\varphi(t) - \varphi'(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $t \in [0,1]$, avec $\varphi - \varphi'$ continue. Par connexité, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi n_0$ pour tout $t \in [0,1]$, et le calcul de l'indice ne dépend pas du choix de φ ou φ'.

(c) Montrons que l'application Ind est continue de $C^0([0,1], \mathbb{S}^1)$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon \in]0,1[$ et soient $\gamma, \gamma' \in C^0([0,1], \mathbb{S}^1)$ telles que $\|\gamma - \gamma'\|_\infty < \epsilon$. Soient φ, φ' les relèvements correspondant à γ et γ'. On a donc

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\varphi'}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|e^{i(\varphi-\varphi')} - 1\right| < \epsilon.$$

Du coup,

$$\varphi(t) - \varphi'(t) \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]2\pi n - 2\arcsin(\epsilon/2), 2\pi n + 2\arcsin(\epsilon/2)[$$

et par connexité, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|\varphi(t) - \varphi'(t) - 2\pi n_0| < 2\arcsin(\epsilon/2)$ pour tout $t \in [0,1]$. Du coup,

$$|\mathrm{Ind}_\gamma - \mathrm{Ind}_{\gamma'}| \leq \frac{2}{\pi}\arcsin(\epsilon/2).$$

Ceci prouve la continuité de l'indice.
Soit maintenant l'application $\psi(s) = \mathrm{Ind}_{h(s,\cdot)}$ pour $s \in [0,1]$. Daprès ce qui précède, ψ est continue sur $[0,1]$. Or, les lacets étant fermés, l'indice est à valeur dans $\mathbb{Z}$. Par connexité, ψ est constante et $\psi(0) = \psi(1)$, donc les deux lacets ont même indice.

(e) La méthode standard consiste à tracer la demi-droite $(x, f(x))$ et à trouver ses deux points d'intersection avec le cercle $\mathbb{S}^1$. Ceci revient à résoudre une équation du second degré (donc choix entre deux signes) et on prend le signe qui fait que l'on fixera le bord. On trouve

$$g(x) := x + \frac{(x, x - f(x)) - \sqrt{(x, f(x)-x)^2 + (1-|x|^2)|f(x)-x|^2}}{|f(x)-x|^2}(f(x)-x)$$

pour $x \in \overline{B}(0,1)$.

(f) Comme $s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_1(t) \in \overline{B}(0,1)$ pour $s,t \in [0,1]$, on pose $h(s,t) = g(s\gamma_0(t) + (1-s)\gamma_1(t))$ pour $s,t \in [0,1]$. La fonction h étant continue, les lacets $g \circ \gamma_0 = \gamma_0$ et $g \circ \gamma_1 = \gamma_1$ sont homotopes, ils ont donc même indice. Or $\mathrm{Ind}_{\gamma_0} = 0$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_1} = 1$: une contradiction. Du coup, f possède un point fixe.