Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

Développement: la décomposition polaire

Références: Arnaudiès-Fraysse, Gourdon.

On se place dans le cadre réel (il existe aussi une décomposition dans le cas complexe). On prouve ici le résultat suivant:

Théorème: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive telles que $A = OS$. Si on suppose A inversible, alors le couple (O, S) est unique, et l'application

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & Gl_n(\mathbb{R}) \\ & (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme ($S_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices définies positives).

1. Existence

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrez que ${}^tAA$ est symétrique.

(b) En déduire qu'il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = S^2$.

(c) On suppose que $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et on pose $O = AS^{-1}$. Montrez que $O \in O_n(\mathbb{R})$

(d) Pour A quelconque, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$. En utilisant la décomposition polaire pour A_k et la compacité de $O_n(\mathbb{R})$, montrez qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$.

2. Unicité

On suppose dans cette partie que $A \in Gl_n(\mathbb{R})$

(e) Soient u, v deux endomorphismes symétriques définis positifs tels que $u^2 = v^2$. Montrez que chaque espace propre de u est stable par v. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base. En déduire que $u = v$.

(f) Soient $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$. En utilisant la question précédente, montrez que le couple (O, S) est unique.

(g) L'unicité est-elle préservée sur des matrices non inversibles?

3. Homéomorphisme

(h) On considère le morphisme φ du théorème. Montrez que φ est définie et continue.

(i) Montrez que φ est bijective.

(j) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et soit une suite $(O_k, S_k)_{k\in\mathbb{N}} \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k\to+\infty}(O_k, S_k) = A$. Montrez qu'il existe une sous-suite $j(k)$ telle que $(O_{j(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. En déduire que $\lim_{k\to+\infty} O_{j(k)} = O$ et $\lim_{k\to+\infty} S_{j(k)} = S$ où $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'unique couple tel que $A = OS$.

(k) Montrez que φ^{-1} est continue. On pourra raisonner par l'absurde en utilisant une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{R}} \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $(\varphi^{-1}(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\varphi^{-1}(A)$, puis aboutir à une contradiction en utilisant *(j)*.