Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2006-2007

$d(u_n, u_{n+1}) \to 0$ **et Méthode de Jacobi.**

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_n$ une suite de E telle que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. On va montrer que $\Gamma = \{\text{valeurs adhérence de la suite } (u_n)_n\}$ est connexe.

Plan de la preuve :

1) On pose $A_p = \{u_n\,;\, n \geq p\}$. Lien entre Γ et les A_p ? En déduire que Γ est compact.

2) On suppose que $\Gamma = A \cup B$ où A et B sont deux fermés, non vides et disjoints. On pose $\alpha = d(A, B)$. Montrer que $\alpha > 0$.

3) On pose $A' = \{x \in E\,;\, d(x, A) < \alpha/3\}$ et $B' = \{x \in E\,;\, d(x, B) < \alpha/3\}$ et $K = E \backslash (A' \cup B')$. Montrer que K est compact.

4) On va montrer que $(u_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans K. Par hypothèse, il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$, $d(u_n, u_{n+1}) < \alpha/3$. On prend un $x_0 \in A$ et un $y_0 \in B$. En utilisant des points de la suite qui approche ces valeurs d'adhérences, construire une suite à valeur dans K et conclure.

Bibliographie : Gourdon.

Application à la méthode de Jacobi pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres :

1) Rappels : La méthode de Jacobi cherche les valeurs propres d'une matrice A symétrique. L'idee est de faire des transformations orthogonales sur la matrice de façon à converger vers une matrice diagonale formée des valeurs propres de A.

a) Mise en place de la méthode : A est symétrique, donc diagonalisable et donc on peut l'écrire sous la forme $O^t\,A\,O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec O orthogonale.

On considère des matrices de la forme $\Omega_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où les termes en θ sont aux lignes et colonnes p et q.

Posant $B = \Omega_{pq}^T\,A\,\Omega_{pq}$, montrer que $\sum_{ij} B_{ij}^2 = \sum_{ij} A_{ij}^2$.

b) Montrer que si $A_{pq} \neq 0$, il existe une et une seule valeur $\theta \in]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4[$ telle que $B_{pq} = 0$. Remarquer que pour cette valeur de θ, on a $\sum_i B_{ii}^2 = \sum_i A_{ii}^2 + 2A_{pq}^2$.

Ainsi, partant de $A_0 = A$, à chaque étape de l'algorithme, on choisit un p et q tels que $|(A_k)_{pq}| = \max\limits_{i \neq j} |(A_k)_{ij}|$ et on fait $A_{k+1} = O_k^t\,A_k\,O_k$ en posant $O_k = \Omega_{pq}$ pour ce choix de p et q (qui varie à chaque étape k bien sur !).

c) Montrer que l'on a aussi $(A_{k+1})_{ii} - (A_k)_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p, q, \\ -\tan\theta_k (A_k)_{pq} & \text{si } i = p, \\ \tan\theta_k (A_k)_{pq} & \text{si } i = q. \end{cases}$

2) On montre maintenant la convergence des valeurs propres, c-à-d que A_k a pour limite $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ avec σ une permutation. Pour cela, on pose $A_k = D_k + R_k$ avec D_k la partie diagonale de A_k.

a) Posant $\varepsilon_k = \|R_k\|_2^2$, montrer que $\varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k$. En déduire que $R_k \to 0$.

b) Montrer que (D_k) n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences. (Montrer qu'une valeur d'adhérence a même polynôme caractéristique que A).

c) Montrer que $D_{k+1} - D_k \to 0$ et conclure.

Bibliographie : Ciarlet

Remarque 1 : Admettre les “rappels” sur Jacobi, cad le 1), et ne pas les remontrer pendant le développement.

Remarque 2 : On peut montrer aussi en supposant en plus que les valeurs propres sont distinctes (et toujours en utilisant le résultat du théorème) la convergence des vecteurs propres . On montre dans ce cas que la suite (O_k) n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences puis que $O_{k+1}-O_k \to 0$. (Cf Ciarlet p 117).