Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Développement, Année 2006-2007
Différences finis pour problème aux limites.

Plan du développement

On cherche à approcher une solution régulière de $-u''+cu=f$ sur $]0,1[$ avec les conditions aux limites $u(0)=0$ et $u(1)=0$. On suppose que c et f sont continues sur $[0,1]$. Soit $h=1/(N+1)$ et $x_i=ih$.

1) Si $u\in C^4([0,1])$ est solution de l'équation différentielle, montrer, en utilisant Taylor-Lagrange à l'ordre 4, que

$$\frac{2u(x_i)-u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{h^2}+c_iu(x_i)=f_i+O(h^2),\qquad \text{pour } i=1,...,N,$$

avec $c_i=c(x_i), f_i=f(x_i)$. On précisera la valeur de $O(h^2)$ obtenue.

2) On va ainsi utiliser la discrétisation de l'équation selon

$$\frac{2u_i-u_{i+1}-u_{i-1}}{h^2}+c_iu_i=f_i,\qquad \text{pour } i=1,...,N,$$

où u_i sera une valeur approchée de $u(x_i)$ (en "oubliant" le $O(h^2)$) et où on a posé $u_{-1}=u_{N+1}=0$. Ecrire le schéma sous forme matricielle $AU_h=F_h$ avec $U_h=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}$ et $F_h=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_N\end{pmatrix}$.

3) Montrer qu'une matrice A est inversible et que son inverse a tous ses coefficients positifs si et seulement si $(Av\geq 0\Rightarrow v\geq 0)$.

4) On pose

$$A_{ch}=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}2+c_1h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+c_1h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1\\ & & & -1 & 2+c_Nh^2\end{pmatrix}.$$

On suppose que $c>0$. Montrer que cette matrice est inversible et que son inverse a tous ses coefficients positifs. Etendre le résultat au cas $c\geq 0$.

5) Montrer que si $c\geq 0$, alors $\|A_{ch}^{-1}\|_\infty\leq\|A_{0h}^{-1}\|_\infty$.

6) Résoudre le cas $c=0$, $f=1$: de façon explicite puis dans le cas discret en utilisant les matrices A_{0h}. En déduire que si $c\geq 0$, alors $\|A_{ch}^{-1}\|_\infty\leq\frac{1}{8}$.

7) Pour $u\in C^4([0,1])$ et $c\geq 0$, montrer l'estimation de l'erreur

$$\max_{i=1,...,N}|u_i-u(x_i)|\leq\frac{h^2}{96}\|u^{(4)}\|_{\infty,[0,1]}.$$

(Référence : Ciarlet)