Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Développement, Année 2006-2007

Théorème ergodique de von Neumann.

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

On va montrer que pour tout $x \in H$, $\lim_{n \to +\infty} T_n x = Px$ où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\,(Id - T)$.

1) Soit $x \in H$. Démontrer que $Tx = x$ si et seulement si $(Tx \mid x) = \|x\|^2$ si et seulement si $(x \mid Tx) = \|x\|^2$.

2) a) En déduire que $\mathrm{Ker}\,(Id - T) = \mathrm{Ker}\,(Id - T^*)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,(Id - T^*)$, $T_n(x) \to x = p(x)$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Im}\,(Id - T)$, $T_n(x) \to 0$.

4) Montrer que pour tout $x \in \overline{\mathrm{Im}\,(Id - T)}$, $T_n(x) \to 0$.

5) Démontrer que $(\mathrm{Im}\,(Id - T))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(Id - T)$.

6) Conclure en utilisant

$$H = \mathrm{Ker}\,(Id - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(Id - T)}.$$

Exercice d'application : On prend $H = L^2(\mathbb{T})$, α réel, $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $f \in H$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\cdot + k\alpha) \underset{H}{\to} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

(On commencera par identifier l'opérateur T et on déterminera $\mathrm{Ker}\,(Id - T)$.)

Remarque : *On a montré au passage le résultat : Soit H un espace de Hilbert et $J \subset H$. Soit (Φ_n) une suite bornée de $\mathcal{L}(H)$ et $\Phi \in \mathcal{L}(H)$. Si la suite $(\Phi_n(x))$ converge vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in J$, alors $(\Phi_n(x))$ converge encore vers $\Phi(x)$ pour tout $x \in \overline{J}$.*

Rappel : *Montrer les propriétés suivantes dans un hilbert H avec $u \in \mathcal{L}(H)$:*

1) $\|u\| = \|u^*\|$,

2) Si F est un sev de H, $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

3) $\overline{\mathrm{Im} u} = (\mathrm{Ker} u^*)^{\perp}$.

4) Si F est un sev de H, $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

5) $H = \mathrm{Ker} u^* \oplus \overline{\mathrm{Im} u}$.

Bibliographie : Objectif Agreg.