

Enoncé du théorème de Montel : Toute famille \mathcal{F} de $H(\Omega)$ uniformément bornée sur tout compact de Ω est normale, c'est-à-dire que toute suite d'éléments contient une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de Ω .

Référence : Rudin, analyse réelle et complexe, version française. (Attention, la version anglaise ne présente pas les choses de la même façon).

Schéma de la preuve :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

1) On commence par construire une suite (K_n) de compacts qui recouvre Ω telle que $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$. On appelle une telle suite une suite exhaustive de compacts.

Se rappeler que $K_n = \{x \in B(0, n) \cap \Omega; \text{dist}(x, C\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$ et le dessin :

2) En utilisant la formule de Cauchy, on montre sur K_n une majoration de la forme

$$|f(z') - f(z'')| \leq \frac{M_{n+1}}{\delta_n} |z' - z''|.$$

(Ceci donne l'équicontinuité.)

3) Soit (f_m) une suite d'éléments de \mathcal{F} et (z_i) une suite dense dans Ω . On montre qu'il existe une sous-suite de (f_m) qui converge en tous les points z_i . (Procédé d'extraction diagonal).

4) Avec l'équicontinuité, on montrer que cette suite converge uniformément sur tous les K_n .

Remarques personnelles/détails à se rappeler par rapport au livre :

Remarque : A propos du théorème d'Ascoli :

Dans le développement ainsi fait, on n'utilise pas le théorème d'Ascoli, mais on refait le raisonnement qu'il contient. Il est bien de connaître l'énoncé malgré tout.

Soit deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) . Soit $C(X, Y)$ l'espace des applications continues de X dans Y . On suppose que (X, d) est un espace métrique compact. Ainsi on peut munir $C(X, Y)$ de la topologie de la convergence uniforme. Rappelons que si (Y, δ) est complet, alors il en est de même de $C(X, Y)$.

Définition : Soit A une partie de $C(X, Y)$. On dit que A est équicontinue sur X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall (x, y) \in X^2; d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Théorème d'Ascoli : Soit A une partie bornée de $C(X, Y)$. Si A est équicontinue sur X , alors A est relativement compact dans $C(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Rappel : Un sous espace A d'un espace topologique est relativement compact (pour la topologie induite) si son adhérence est compacte.

Remarque : Le théorème d'Ascoli permet de montrer aussi Cauchy-Péano.

Application du Théorème de Montel

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{C} . Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe a .

1) Montrer que les composées successives de f forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors f est une bijection de Ω dans Ω .

Bibliographie : Chambert-Loir.