Méthodes à un pas pour les E.D.O.

On considère une équation différentielle ordinaire

$$(E) \qquad y'(t) = f(t, y(t)),$$

où, pour simplifier, on prendra y *scalaire* et f définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, suffisamment régulière. On subdivise l'intervalle $[0, T]$ avec $N + 1$ points équirépartis $0 = t_0 < t_1 = h < t_2 = 2h < ... < t_N = Nh = T$. On envisage des méthodes à un pas, *i.e.* s'écrivant sous la forme

$$(*) \qquad y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \qquad 0 \leq n < N,$$

où y_n est la valeur approchée de $y(t_n)$ et y_0 est donné. La fonction $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, \delta] \to \mathbb{R}$ est supposée continue (ici, $\delta > 0$). On notera $z : [0, T] \to \mathbb{R}$ la solution exacte de (E) et on définit e_n, l'erreur de consistance pour z, par

$$e_n \equiv z(t_{n+1}) - z(t_n) - h\Phi(t_n, z(t_n), h), \qquad 0 \leq n < N.$$

NOTION DE CONSISTANCE ET D'ORDRE.

Définition : La méthode $(*)$ est *consistante* si, pour toute solution exacte z de (E), on a

$$\sum_{0 \leq n < N} |e_n| \to 0 \qquad \text{si } h + |y_0 - z(0)| \to 0.$$

Définition : Soit $p \geq 0$. La méthode $(*)$ est d'ordre (au moins) p si, pour toute solution exacte z de (E), il existe C telle que l'on ait

$$|e_n| \leq Ch^{p+1} \qquad 0 \leq n < N.$$

Vérifier qu'alors

$$\sum_{0 \leq n < N} |e_n| \leq CTh^p \to 0 \qquad \text{si } N \to +\infty.$$

Ex. 1 : Condition nécessaire et suffisante de consistance.
1) Soit z une solution de (E). Vérifier que

$$\sum_{0 \leq n < N} |e_n| = h \sum_{0 \leq n < N} \left| \frac{1}{h}\Big(z(t_{n+1}) - z(t_n)\Big) - \Phi(t_n, z(t_n), h) \right|$$
$$= h \sum_{0 \leq n < N} \Big| z'(t_n) - \Phi(t_n, z(t_n), 0) \Big| + o_{h \to 0}(1).$$

En déduire que $\sum_{0 \leq n < N} |e_n| \to 0$ lorsque $h \to 0$ si et seulement si

$$\int_0^T \big| f(t, z(t)) - \Phi(t, z(t), 0) \big| \, dt = 0.$$

2) Démontrer que $(*)$ est consistante si et seulement si

$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y) \qquad \text{pour } \; 0 \leq t \leq T, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Notion de stabilité.

Définition : La méthode $(*)$ est *stable* s'il existe une constante de stabilité S telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toutes suites $(y_n)_{0\le n\le N}$ et $(\tilde{y}_n)_{0\le n\le N}$ vérifiant $(*)$ et $(*)$ perturbée

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \qquad \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\Phi(t_n, \tilde{y}_n, h) + \varepsilon_n, \qquad 0 \le n < N$$

on ait

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - \tilde{y}_n| \le S\Big(|y_0 - \tilde{y}_0| + \sum_{0\le n<N} |\varepsilon_n|\Big).$$

Ex. 2 : Lemme de Gronwall discret. On suppose que les suites (finies) $(\varepsilon_n)_{0\le n\le N}$ et $(\theta_n)_{0\le n\le N}$ vérifient $\theta_n \ge 0$ et $\theta_{n+1} \le (1+\Lambda h)\theta_n + |\varepsilon_n|$, $0 \le n < N$. Montrer par récurrence que

$$\theta_n \le \theta_0 e^{\Lambda t_n} + \sum_{0\le i<n} e^{\Lambda(t_n - t_{i+1})}|\varepsilon_i|.$$

En déduire que

$$\max_{0\le n\le N} \theta_n \le e^{\Lambda T}\Big(\theta_0 + \sum_{0\le i<n} |\varepsilon_i|\Big).$$

Ex. 3 : Condition suffisante de stabilité. On suppose la fonction Φ lipschitzienne en y, *i.e.* il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que pour $0 \le t \le T$, $0 \le h \le \delta$ et $y, z \in \mathbb{R}$, on ait

$$\Big|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)\Big| \le \Lambda |y - z|.$$

Montrer qu'alors la méthode est stable et que l'on peut prendre $S = e^{\Lambda T}$.

Méthodes convergentes - Exemples.

Ex. 4 : Stabilité et consistance entraîne convergence. On suppose la méthode $(*)$ stable et consistante (d'ordre p). Montrer que

$$\max_{0\le n\le N} |z(t_n) - y_n| \to 0 \qquad \text{si} \qquad h + |y_0 - z(0)| \to 0.$$

Méthode d'Euler (explicite) $\qquad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$

Méthode du point milieu $\qquad y_{n+1} = y_n + hf\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\Big).$

Méthode de Runge-Kutta classique "RK4". On définit $\tau_n = t_n + \frac{h}{2}$, et

$$\begin{array}{ll} p_{n,1} = f(t_n, y_n), & y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2}p_{n,1}, \\ p_{n,2} = f(\tau_n, y_{n,2}), & y_{n,3} = y_n + \frac{h}{2}p_{n,2}, \\ p_{n,3} = f(\tau_n, y_{n,3}), & y_{n,4} = y_n + hp_{n,3}, \\ p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}), & \end{array} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\Big(p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4}\Big).$$

Pour les deux premières méthodes, calculer l'ordre et vérifier la condition suffisante de stabilité. (Plus long : même chose pour $RK4$). Etudier aussi la méthode d'Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$ (Φ est l'inverse d'une fonction).

Références :

• J-P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles.*
• M. Crouzeix et A.L. Mignot *Analyse numérique des équations différentielles.*