Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

Problèmes d'extréma

Exercice 1. Comportement de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ au voisinage des points critiques.

Exercice 2. Déterminez $\min\{x/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$

Exercice 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel Euclidien de dimension finie. Soit f un endomorphisme symétrique de E.

a. Montrez que

$$\inf_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

existe et est atteint en un vecteur $x_0 \in E$.

b. Montrez que x_0 est un vecteur propre de f (on pourra faire un développement de la fonctionnelle minimisée en x_0 ou bien utiliser le théorème des extréma liés)

c. Montrez que $\mathbb{R}x_0$ possède un supplémentaire $f-$stable.

c. Montrez que f est diagonalisable.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On se donne des fonctions $a_{ij}, b_k \in C^0(\Omega)$ pour $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. On considère alors l'opérateur différentiel pour $u \in C^2(\Omega)$ par

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)$$

pour tout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ est définie positive pour tout $x \in \Omega$ et qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$a_{11}(x) \geq \alpha \text{ et } |b_1(x)| \leq \beta \text{ pour tout } x \in \Omega$$

.

a. Soit B une matrice symétrique positive. Montrez que $Tr(AB) \geq 0$.

b. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. On suppose que $Lu > 0$ sur Ω. Montrez que le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ n'est atteint qu'au bord (on raisonnera par l'absurde).

c. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. On suppose que $Lu \geq 0$ sur Ω. Montrez que $\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$. On pourra utiliser la fonction annexe $v(x) = u(x) + \mu e^{\lambda x_1}$ et montrer que $Lv > 0$ pour des valeurs de μ et λ judicieusement choisies.

Exercice 5. Déterminez $\min\{4xy + z/\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 - 2y^2 \leq z \leq 2\}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Soit $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Maximiser $x_1 x_2 ... x_n$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + ... + x_n = s$, $x_i \geq 0$ pour $i = 1...n$. En déduire l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

dès que $x_k \geq 0$ pour tout $k = 1...n$.

Exercice 7: Déjà fait, mais qui va si bien dans ce thème. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On cherche à montrer qu'il possède une racine dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert).

(a) Montrez qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

(b) On suppose que $P(z_0) \neq 0$. En utilisant un développement limité de P en z_0, montrez une contradiction.