INTEGRALES GENERALISEES

En T.D., on ne corrigera qu'en cas de besoin les exercices **1**, **2** et **3** 1).

Ex. 1 : Intégrale de Riemann. Etablir que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Ex. 2 : Convergence, calculs. 1) Etudier la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \int_0^1 \ln t \, dt, \quad \int_5^{+\infty} \frac{dt}{t^2-5t+4}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt, \quad \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}, \quad a > 1.$$

2) Calculer à l'aide d'une relation de récurrence $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 3 1) Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\, dt, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^{5/2}}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{1+t^2}\, dt,$$

$$\int_0^1 \ln(1-\sqrt{1-t})\, dt, \qquad \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos(\frac{1}{t})\right) dt, \qquad \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

2) Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t \sin^2(t)}.$$

On pourra utiliser

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+e^t\sin^2(t)} \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+e^{n\pi}(\frac{2t}{\pi})^2}.$$

Montrer de même la divergence de

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x \, dx.$$

Ex. 4 Règle d'Abel

1) Donner la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} t^2 \cos(t^4)\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{2+\cos(t)}} \frac{dt}{t}.$$

2) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction d'Airy

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ixt - i\frac{t^3}{3}\right) dt$$

est bien définie.

3) Donner la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\cos t + \sqrt{t}}\,dt.$$

Ex. 5 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$
1) Vérifier que f est bien définie et continue pour $x \geq 0$, puis que
$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\,dt \qquad \text{pour} \quad x > 0.$$
2) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Calculer cette intégrale.

Ex. 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ayant des limites $L_\pm$ en $\pm\infty$. Pour $a \geq 0$, montrer la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) - f(x)\,dx$.

Exemple : Déterminer, pour $a \geq 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan\,(t+a) - \arctan\,(t)\,dt$.

Ex. 6 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que, pour a, $b > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt$$
converge et calculer sa valeur. En déduire pour a, $b > 0$ la convergence et la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\,(at) - \arctan\,(bt)}{t}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt \quad (\text{poser } x = -\ln t).$$

Ex. 7 [Gou, p. 177] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2\,dx$ et $\int_0^{+\infty} (f'')^2\,dx$ convergent. En intégrant par parties $\int_0^X (f'(x))^2\,dx$, montrer que $f(x)f'(x)$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$, puis que cette limite est 0. Montrer alors que $\int_0^{+\infty} (f'(x))^2\,dx$ converge. Si, en outre, $f(0)f'(0) = 0$, établir que
$$\left(\int_0^{+\infty} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)\left(\int_0^{+\infty} (f'')^2\right).$$
Peut-il y avoir égalité ?