Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD: Interversion limite-intégrale

Exercice 1: Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Schwarz (qu'on n'utilisera donc pas dans cet exercice...) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit $f \in C^2(\Omega)$. Soit $(a,b) \in \Omega$. Montrez qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ($|x-a| < \epsilon_0$ et $|y-b| < \epsilon_0$) implique que $(x,y) \in \Omega$. Calculez

$$\int_{]a,a+\epsilon[\times]b,b+\epsilon[} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \right) dxdy$$

En déduire que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 2: Soit $f \in C^0([0,1])$. Déterminez $\lim_{nto+\infty} n \int_0^1 t^n f(t)\, dt$.

Exercice 3: On cherche à calculer $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } G(x) = \int_0^x e^{-u^2}\, du.$$

Montrez que $F + G^2 = C^{te}$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-u^2}\, dx$

Exercice 4: Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche à calculer $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(\lambda t)\, dt$. Montrez que F est dérivable et que $F'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} F(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire $F(\lambda)$ en utilisant l'exercice précédent.

Exercice 5: On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Montrez que Γ est C^∞ sur son ensemble de définition.

Exercice 6: Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\rho_n(x) := n\rho\,(nx)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction reglée bornée. On pose alors la fonction

$$f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) f(x-t)\, dt$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrez que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

b. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en x_0. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

c. On suppose que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrez que (f_n) converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$.

d. On suppose que $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Montrez que (f_n) converge vers f en norme C^1 quand $n \to +\infty$.

Exercice 7: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$.