Université de Nice-Sophia Antipolis
Préparation à l'agrégation de Mathématiques
Année 2006-2007

TD-Développement: La méthode de Laplace

(Feuille inspirée du petit Guide de Calcul Différentiel de François Rouvière.) Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit $\varphi \in C^{\infty}([a,b[)$ et soit $f \in C^0([a,b[)$. On suppose que

1. φ est strictement croissante

2. f est strictement positive et il existe $t_0 \geq 0$ tel que $x \mapsto e^{-t_0\varphi(x)}f(x)$ est intégrable sur $[a,b[$.

Le but de ce TD est de déterminer un équivalent quand $t \to +\infty$ de

$$F(t) := \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx.$$

1. Généralités

1.1 Montrez que F est définie pour des réels t assez grands.
1.2 Déterminez $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.

2. Le cas $\varphi'(a) > 0$

2.1 Soit $\alpha \in]a,b[$. Déterminez un équivalent de $\int_a^\alpha e^{-tx}\,dx$ quand $t \to +\infty$.
2.2 Donnez une majoration grossière de $\int_\alpha^b e^{-tx} f(x)\,dx$.
2.3 En déduire un équivalent de $\int_a^b e^{-tx} f(x)\,dx$.
2.4 Plus généralement, on suppose que $\varphi'(a) > 0$. En utilisant la même méthode, montrez que

$$F(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{t\varphi'(a)}$$

3. Le cas $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi"(a) > 0$

3.1 En vous inspirant de la première partie, montrez que si $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$ pour tout $x \geq 0$, alors

$$F(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}f(0)}{2\sqrt{t}}$$

3.2 Toujours en vous inspirant de la première partie, montrez que si $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi"(a) > 0$, alors on a

$$F(t) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi"(a)}} \cdot \frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

3.3 Application: Donnez un équivalent quand $t \to +\infty$ de $\int_0^\infty e^{-x}x^t\,dx$. En déduire la formule de Stirling. Indication: on pourra avantageusement utiliser le changement de variables $x = (1+y)t$

4. Cas général

On suppose que $k := \inf\{i \geq 1 / \varphi^{(i)}(a) \neq 0\}$ est fini. Donnez alors un équivalent de F en l'infini.