PROBLEMES D'OPTIMISATION.

Ex. 1 **1)** On souhaite déterminer $\max_{||(x,y)||=1} J(x,y)$, où $J(x,y) = x^2 - x\sqrt{3} + 1 - 2y$.

a) Montrer que le maximum de J sur le cercle est atteint en au moins un point (x_0, y_0). Calculer les différentielles de J et de $(x,y) \mapsto ||(x,y)||^2 = x^2 + y^2$. Justifier l'existence d'un réel λ tel que

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_0, y_0) = 2\lambda x_0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial J}{\partial y}(x_0, y_0) = 2\lambda y_0.$$

Calculer x_0 et y_0 en fonction de λ.
b) En comparant $J(x_0, y_0)$ avec $J(x_0, -y_0)$, justifier que $\lambda > 0$. En utilisant la contrainte $||(x_0, y_0)|| = 1$ établir que λ doit vérifier l'équation $1 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{4(1-\lambda)^2}$. En étudiant $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{4(1-\lambda)^2}$, démontrer que $\lambda = 2$ est l'unique solution positive de cette équation. Calculer alors (x_0, y_0) et la valeur de J correspondante. Que vaut $\max_{||(x,y)||=1} J(x,y)$? Que faudrait-il faire pour calculer $\min_{||(x,y)||=1} J(x,y)$?

2) On souhaite déterminer $\max_{||(x,y,z)||=1} x^2 - 2y + z$. Montrer que le maximum sur la sphère de $J(x,y,z) = x^2 - 2y + z$ est atteint en au moins un point (x_0, y_0, z_0), et justifier l'existence d'un réel λ tel que

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2\lambda x_0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2\lambda y_0, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial J}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2\lambda z_0.$$

Calculer y_0 et z_0 en fonction de λ, puis x_0. Utiliser la contrainte $||(x_0, y_0, z_0)|| = 1$ pour déterminer toutes les valeurs possibles de λ. En déduire $\max_{||(x,y,z)||=1} J(x,y,z)$ et $\min_{||(x,y,z)||=1} J(x,y,z)$.

Ex. 2 : Inégalité de Minkowski. Soit $n \in \mathbb{N}$. On "oublie" que $\big|\big|(x_1, ..., x_n)\big|\big|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), et on souhaite montrer l'inégalité triangulaire (inégalité de Minkowski) : pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$,

$$(\mathcal{M}) \qquad \big|\big|x + y\big|\big|_p \leq \big|\big|x\big|\big|_p + \big|\big|y\big|\big|_p.$$

1) Vérifier que $(\mathcal{M})$ est vraie lorsque x et y sont colinéaires.
2) On fixe α, $\beta > 0$ et on envisage le problème de maximisation sous contrainte

$$S = \sup\left\{ \big|\big|x + y\big|\big|_p^p, \ \ \big|\big|x\big|\big|_p^p = \alpha^p, \ \big|\big|y\big|\big|_p^p = \beta^p \right\}.$$

Montrer que S est atteint en au moins un point (X, Y). Calculer les dérivées partielles de $x \mapsto \big|\big|x\big|\big|_p^p$ en X, et justifier que les différentielles $d_{(X,Y)}\big|\big|x\big|\big|_p^p$ et $d_{(X,Y)}\big|\big|y\big|\big|_p^p$ sont linéairement indépendantes. Appliquer alors le théorème des extréma liés pour établir que X et Y sont colinéaires. Conclure.

3) *Autre preuve de* $(\mathcal{M})$. On fixe un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ et on envisage le problème

$$S = \sup\left\{ \big|\big|x + y\big|\big|_p^p, \ \ \big|\big|x\big|\big|_p^p = \alpha^p \right\}.$$

Démontrer que S est atteint en au moins un point X. Appliquer le théorème des extréma liés pour déduire que $X+y$ et X sont colinéaires. En déduire que $S \le (\alpha + \left|\left|y\right|\right|_p)^p$, puis $(\mathcal{M})$.

Ex. 3 : Convergence de la méthode du gradient à pas optimal

On souhaite résoudre le système linéaire $Au = b$ carré de taille n, à matrice A symétrique définie positive, par la méthode du gradient optimal, où l'on part de $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et l'on calcule successivement :

$$w_k \equiv Au_k - b, \qquad \rho_k \equiv \frac{||w_k||^2}{\big(Aw_k, w_k\big)}, \qquad u_{k+1} \equiv u_k - \rho_k w_k.$$

On définit $\bar{u} \equiv A^{-1}b$ et $E(u) \equiv \big(A(u-\bar{u}), u-\bar{u}\big)$.

1) Vérifier que $E(u_k) = \big(w_k, A^{-1}w_k\big)$ et que $w_{k+1} = w_k - \rho_k A w_k$. En déduire que $E(u_{k+1}) = \big(w_k - \rho_k A w_k, A^{-1}w_k - \rho_k w_k\big) = E(u_{k+1}) = E(u_k) - 2\rho_k ||w_k||^2 + \rho_k^2 \big(Aw_k, w_k\big)$, puis, avec la définition de ρ_k, que

$$E(u_{k+1}) = E(u_k)\left(1 - \frac{||w_k||^4}{\big(A^{-1}w_k, w_k\big)\ \big(Aw_k, w_k\big)}\right).$$

3) Soit $0 < \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ les valeurs propres de A. Pour $w \in \mathbb{R}^n$, $w \ne 0$, montrer que $\big(Aw, w\big) \le \lambda_n ||w||^2$ et $\big(A^{-1}w, w\big) \le \lambda_1^{-1} ||w||^2$. En déduire que

$$E(u_{k+1}) \le E(u_k)\left(1 - \frac{1}{K(A)}\right), \qquad \text{avec} \quad K(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

En déduire alors que

$$||u_k - \bar{u}|| \le \sqrt{\frac{E(u_k)}{\lambda_1}} \le \sqrt{\frac{E(u_0)}{\lambda_1}}\left(1 - \frac{1}{K(A)}\right)^{\frac{k}{2}} \to 0 \qquad \text{quand} \quad k \to +\infty.$$

4) Meilleure estimation de la convergence (grâce au Lemme de Kantorovitch).

a) Soit $(\alpha_i)_{1 \le i \le n}$ positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On note $\varphi(t) \equiv \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n} - \frac{t}{\lambda_1 \lambda_n}$ la fonction affine telle que $\varphi(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1}$ et $\varphi(\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n}$. En utilisant la convexité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \le \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\lambda_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i\right).$$

En notant $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i$, vérifier alors que

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right) \le y\varphi(y) = \frac{y}{\lambda_1 \lambda_n}\Big(\lambda_1 + \lambda_n - y\Big) \le \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

b) En orthonormalisant A, en déduire que pour $w \ne 0$,

$$1 - \frac{||w||^4}{\big(A^{-1}w, w\big)\ \big(Aw, w\big)} \le 1 - \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2} = \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}\right)^2$$

Etablir alors que

$$||u_k - \bar{u}|| \le \sqrt{\frac{E(u_k)}{\lambda_1}} \le \sqrt{\frac{E(u_0)}{\lambda_1}}\left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}\right)^k.$$

Références :

• **Ex. 2 :** L. Schwartz, *Analyse II : Calcul dfférentiel et équations différentielles*, Hermann. Th. 3.10.3, p. 292;

• **Ex. 3 :** P. Lascaux, R. Theodor, *Analyse Numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Tome 2, Chap. 8.2, et Tome 1, p. 90 (lemme de Kantorovitch). Masson.