Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 244, Année 2006-2007

Fonction d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Se référer au panorama pour les points de cours à inclure dans la leçon. On veillera surtout à ne pas oublier la partie du titre "Exemples et applications" : théorème de d'Alembert-Gauss, calcul d'intégrales, de sommes, identité entre fonctions trigos et séries, ...

Pour la présentation orale du plan, on parlera de ce qui soutient les preuves : le théorème et la formule de Cauchy, et en quoi, ils interviennent. On mettra aussi en évidence oralement les propriétés très fortes que sont les zéros isolés, le prolongement analytique et le principe du maximum.

La bibliographie proposée pour la leçon est la même que celle du panorama.

De nombreux choix de développements sont possible (beaucoup des exercices du panorama sont envisageables : théorème de Cauchy, ...). Il est bien que l'un d'eux (bien lire d'eux et pas forcément deux) soit un peu complet sur les outils utilisés. Par exemple $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ (exemple indispensable dans le plan, ex 20 panorama).

Exercice 1 (Exercices type oral avec Formules de Cauchy)

Soit f entière telle que $|f(z)| \leq A + B|z|^a$ pour tout z plus grand en module qu'un certain R, avec $a > 0$. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 2 (Exercices type oral avec Zéros isolés/Prolongement analytique)

Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω qui ne s'annulent pas. Soit (a_n) une suite de complexes 2 à 2 distincts qui converge dans Ω telle que $f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n)$ pour tout n. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = cg$.

Exercice 3 (Exercices type oral avec calcul d'intégrale)

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2) Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\, dt$.

3) Calculer $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}(1+t^2)}\, dt$.

Exercice 4 (Théorème des trois cercles de Hadamard)

1) Soit $0 < r < R$ fixés. Soit f holomorphe sur un ouvert Ω avec $\{z \in \mathbb{C}\,;\, r \leq |z| \leq R\} \subset \Omega$. On pose pour $r \leq \rho \leq R$,

$$M(\rho) = \sup\{|f(z)|\,;\, |z| = \rho\}.$$

a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. Appliquer le principe du maximum à la fonction $z \mapsto z^p f(z)^q$ sur la couronne $\{z \in \mathbb{C}\,;\, r \leq |z| \leq R\}$.

b) En déduire que, pour tout $r \leq \rho \leq R$, $\rho^\theta M(\rho) \leq \max(r^\theta M(r), R^\theta M(R))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

c) En utilisant une valeur bien choisie de θ, montrer que pour $r \leq \rho \leq R$, on a

$$M(\rho) \leq M(r)^{(\ln R - \ln \rho)/(\ln R - \ln r)} M(R)^{(\ln \rho - \ln r)/(\ln R - \ln r)}.$$

2) Variante : théorème des trois droites.

Soit f holomorphe sur $\Omega = \{z\,;\, 0 < \mathcal{R}ez < 1\}$ et continue et bornée (par disons $K > 0$) sur $\overline{\Omega}$. On pose pour $\theta \in [0, 1]$,

$$M(\theta) = \sup\{|f(\theta + it)|\,;\, t \in \mathbb{R}\}.$$

On veut montrer que pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$M(\theta) \leq M(1)^\theta M(0)^{1-\theta}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $F(z) = e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} f(z)$. On pose $Q_R = \{z\,;\, 0 \leq \mathcal{R}ez \leq 1,\, |\mathcal{I}mz| \leq R\}$. On suppose qu'il existe $z_0 \in Q_R$ tel que $F(z_0) \neq 0$. (Sinon, tout devient évident.)

a) Montrer qu'il existe $R_{\varepsilon,\lambda}$ tel que F atteint son maximum sur $Q_{R_{\varepsilon,\lambda}}$ en un point z tel que $\mathcal{R}ez = 0$ ou $\mathcal{R}ez = 1$.

b) Montrer qu'alors $\forall z \in Q_{R_{\varepsilon,\lambda}}$, $|F(z)| \leq \max(M(0), e^{\varepsilon+\lambda} M(1))$.

c) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on prend $\lambda(\varepsilon)$ tel que $M(0) = e^{\varepsilon+\lambda} M(1)$. Montrer qu'alors $|f(\theta + it)| \leq e^{\varepsilon(t^2-\theta^2)+\varepsilon\theta} M(0)^{1-\theta} M(1)^\theta$ pour tout $0 < \theta < 1$, $|t| \leq R_{\varepsilon,\lambda(\varepsilon)}$.

d) Conclure.

Remarque : Le théorème des trois droites permet de montrer le théorème de Riesz-Thorin d'interpolation des applications linéaires :

Soit (X, σ, μ) un espace mesuré. Soit $T \in L_c(L^{p_1}(X), L^{q_1}(X)) \cap L_c(L^{p_2}(X), L^{q_2}(X))$ de normes $\|T\|_1$ et $\|T\|_2$. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$, T se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$ où $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ et $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$, de norme $\|T\|_\theta \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta$.

A l'aide de ce théorème, on prolonge la transformée de Fourier et la convolution sur les espaces L^p. En effet, la transformée de Fourier est définit naturellement sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} f(x)\, dx$ et $\mathcal{F} \in L_c(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))$. Il est alors classique de la prolonger en une application linéaire continue isométrique de L^2 dans L^2. Par Riesz-Thorin, on obtient un prolongement de L^p dans $L^{p'}$ pour tout $p \in]1,2[$.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty[$, on note la convolution $T(g) = f * g$. On a alors $\|T(g)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$ et $\|T(g)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$, ce qui donne $T \in L_c(L^{p'}, L^\infty) \cap L_c(L^1, L^p)$. Par Riesz-Thorin, on peut alors prolonger T en une application de $L_c(L^q, L^r)$ pour tout $q \in [1, +\infty]$ et avec $1/r = 1/p + 1/q - 1 \geq 0$.

Ceci peut aussi s'utiliser dans la leçon sur les prolongements. Voir le Zuily-Queffélec pour cette remarque et les outils introduits sur les fonctions holomorphes pour montrer Riesz-Thorin.

Bibliographie des exercices : Chambert-Loir, Fermigier, tome 2 ; Tauvel ; Zuily-Queffélec.