

**Remarques sur la leçon**

Avoir des exemples variés pour les suites (/séries).

Penser à la méthode en  $\alpha$  pour le comportement asymptotique de  $u_{n+1} = \sin u_n$  et  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ .

Penser aussi à la comparaison série-intégrale qui permet d'avoir des équivalents.

Rappel 1 : Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$   $u_0 \in I$ ,  $\lambda$  est un point fixe dit stable si  $|f'(\lambda)| < 1$ , quasi-stable si  $|f'(\lambda)| = 1$  et instable si  $|f'(\lambda)| > 1$ .

Rappel 2 : A propos de la vitesse de convergence de  $u_n$  vers  $\alpha$ , notant  $e_n = u_n - \alpha$ , elle est dite linéaire (ou d'ordre 1) si  $|e_{n+1}| \leq L|e_n|$  avec  $L < 1$ , super-linéaire si  $|e_{n+1}| \leq q_n|e_n|$  avec  $q_n \rightarrow 0$  et d'ordre  $p$  si  $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^p$  (dans le cas  $p = 2$ , on parle de convergence quadratique).

**Exercice 1 (Méthode de Newton)**

Soit  $f$  de classe  $C^1$  de  $I = [u_0 - c, u_0 + c]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $|f(u_0)| \leq cm$ , et pour tout  $y, z \in I$ ,  $|f'(y)| \geq 2m$ ,  $|f'(y) - f'(z)| \leq m$ . On pose  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ .

1) Montrer que  $|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{c}{2^n}$ ,  $u_n \in I$  et  $|f(u_n)| \leq \frac{cm}{2^n}$ .

2) Montrer que  $f$  possède une unique racine  $\alpha$  dans  $I$  et que  $u_n \rightarrow \alpha$ .

3) Pour  $f$  de classe  $C^2$  et telle que  $|f''| \leq M$  sur  $I$ , alors il existe  $q$  tel que  $|u_n - \alpha| \leq \frac{(cq)^{2^n}}{q}$ .

4) Application : approximation de la racine carrée d'un nombre entre 2 et 200, puis de tout nombre plus grand que 2.

(Référence : Pommellet et Baranger (Introduction à l'analyse numérique))

**Exercice 2 (Accélération d'Aitken et de Steffenson)**

Soit  $x_n \rightarrow \xi$  et telle qu'il existe  $|k| < 1$  et  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  telle que  $x_n \neq \xi$  and  $x_{n+1} - \xi = (x_n - \xi)(k + \varepsilon_n)$ .

1) Montrer que  $y_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$  est bien définie et converge vers  $\xi$  plus rapidement, c'est-à-dire que  $\frac{y_n - \xi}{x_n - \xi} \rightarrow 0$ .

2) La méthode de Steffenson consiste, étudiant la convergence de  $x_{n+1} = f(x_n)$  avec  $f$  de classe  $C^1$ , à poser  $y_n = f(x_n)$  et  $z_n = f(y_n)$  et  $x_{n+1} = x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n}$ .

a) Montrer qu'il existe  $g$  tel que  $x_{n+1} = g(x_n)$ . Correspondance entre les points fixes de  $f$  et de  $g$  ?

b) Pour  $f$  de classe  $C^2$ , si  $x_n \rightarrow \xi$  un point fixe instable  $\xi$  de  $f$ , pour  $x_0$  assez proche de  $\xi$ , alors Steffenson converge vers  $\xi$ .

(Référence : Chambert-Loir)

**Exercice 3 (Stabilité)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$   $u_0 \in I$ ,  $\lambda$  est un point fixe.

1) a) Si  $u_n \rightarrow \lambda$  instable, alors  $u_n$  stationne en  $\lambda$ .

b) Si  $\lambda$  est stable, alors il existe un voisinage de  $\lambda$  dans lequel  $u_0$  donne une suite  $u_n$  convergente vers  $\lambda$ .

2) On suppose  $f$  de classe  $C^2$ ,  $I$  compact et  $|f'(x)| \leq k$ ,  $k \in ]0, 1[$  pour tout  $x \in I$ . Montrer que  $f$  possède un point fixe unique  $\lambda$  et que pour  $u_0 \in I$ ,  $u_n \rightarrow \lambda$ . On suppose  $K = f'(\lambda) > 0$  et qu'il existe  $n_0$  tel que  $u_n > \lambda$  pour  $n \geq n_0$ . Montrer qu'alors  $u_n - \lambda \sim cK^n$ .

(Référence : Pommellet)

#### Exercice 4 (Transformation de Toeplitz)

Soit  $(c_{nm})$  une suite double. Pour  $(u_n)$  une suite, on pose (si c'est possible)  $(Tu)_n = \sum_{m=0}^{+\infty} c_{nm}u_m$ . On dit que la transformation  $T$  est régulière si pour toute suite  $(u_n)$  convergente, la suite  $((Tu)_n)$  est convergente et de même limite.

Montrer que  $T$  est régulière si et seulement si la suite  $(c_{nm})$  vérifie les trois conditions

i)  $\exists A$  tel que  $C_n = \sum_{m=0}^{+\infty} |c_{nm}| < A$  pour tout  $n$ ,

ii) pour tout  $m$ ,  $c_{nm} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,

iii)  $\sum_{m=0}^{+\infty} c_{nm} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

(Référence : Chambert-Loir)

#### Exercice 5 (Equirépartition)

Soit  $(x_n)$  une suite de  $[0, 1]$ . Pour  $0 \leq a < b < 1$ , on pose  $N(a, b, n) = \text{card}\{m \leq n; x_m \in [a, b]\}$ . On dit que  $(x_n)$  est équirépartie si  $N(a, b, n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(b - a)$ .

1) Montrer que si  $(x_n)$  est équirépartie, alors  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[0, 1[$ .

2) Montrer que  $(x_n)$  est équirépartie si et seulement si pour tout fonction  $f$  Riemann intégrable sur  $[0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f$ .

3) Montrer que  $(x_n)$  est équirépartie si et seulement si pour tout fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f$ .

4) Montrer que  $(x_n)$  est équirépartie si et seulement si  $\sum_{k=0}^n e^{2i\pi m x_k} = o(n)$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}^*$ .

(Critère de Weyl).

5) Pour  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , on pose  $(n\theta)$  le nombre de  $[0, 1[$  tel que  $n\theta - (n\theta) \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $(n\theta)$  est équirépartie.

(Référence : Chambert-Loir)