Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 230, Année 2006-2007

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Remarques sur la leçon

Reprendre les points détaillés dans la fiche de la leçon 231. Les développements peuvent d'ailleurs être les mêmes pour les deux leçons (Comparaison $\sum \int$ + série harmonique), (Inégalité de Carlemann) et (Stirling et équivalent de suites. Cet exemple utilise la sommation des relations de comparaison donc à placer au bon niveau dans le plan). Le théorème de Cauchy-Mertens peut aussi servir de développement.

Un enchainement assez classique : Définitions($\sum$, S_n, R_n, CV, DV), exemples (géom, $\sum 1/n$). Propriétés algébriques. Séries à termes positifs (CVA (avec Cauchy), S_n majorées, Cauchy, d'Alembert, Raabe-Duhamel, th avec $\leq$, o, O, $\sim$) . Alternées (CSA, Abel), Groupement, convolution. Puis sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale qui permettent en particulier d'avoir le comportement des restes et sommes partielles.

Et mettre des exemples !!!

Penser aux exemples classiques : développement asymptotique de $\sum \frac{1}{n}$, de $u_{n+1} = \sin u_n$ (via la comparaison des restes de la série en $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$, ou avec l'exemple $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$),...

En plus des deux techniques indispensables (sommation des relations de comparaison et comparaison série-intégrale) pour avoir des comportement des restes et sommes partielles, on peut étudier les exemples suivants :

Pour $f > 0$ et de classe C^1 telle que $f'/f \underset{+\infty}{\to} p \neq 0$, alors

pour $p \in]0, +\infty[$, $\sum f(n)$ diverge et $\sum_0^n f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_0^{n+1} f$,

pour $p \in] - \infty, 0[$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{e^p - 1} \int_n^{+\infty} f$,

pour $p = -\infty$, $\sum f(n)$ converge et $\sum_n^\infty f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$. (Moisan-Vernotte + Gourdon).

Soit $u_n > 0$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, si de plus $u_n = o(S_n)$, on peut donner un équivalent des restes ou sommes partielles. Si $\sum u_n$ converge, alors on a des résultats semblables sur $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

On peut parler aussi de théorème de type taubérien, par exemple si $S_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $\Sigma_n = (S_1 + \cdots + S_n)/n$, si (Σ_n) converge et si $|u_n| \leq M/n$, alors $\sum u_n$ converge. (cf Chambert-Loir par exemple).