Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 242, Année 2006-2007

Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

Remarques sur la leçon

Leçon dangereuse si on n'a pas bien lu son titre. Il faut donc utiliser des fonctions définies par des séries sous plusieurs aspects. De plus, par fonctions définies par des séries, il ne faut rien oublier : séries entières, séries de Fourier et pas seulement de ces deux types.

Il faut faire une zoologie des phénomènes que cela permet de créer : continue partout mais dérivable nulle part, continue mais monotone en aucun point, ...

Pour les applications des séries entières : résolution d'équa diff, calcul de sommes, d'intégrales, des suites, problème de dénombrement (Cf la feuille de Td sur ce thème).

Sur les séries de Fourier, ne pas oublier la résolution d'une EDP en utilisant les séries de Fourier (cf le Td qui a été fait sur ce thème).

On s'attend à voir apparaitre la fonction d'une façon ou d'une autre (Prolongement,...)

Ne pas oublier Borel + applications, Formule sommatoire de Poisson + application à Jacobi.

Exercice (Somme de Gauss et Intégrale de Fresnel)

1) Rappeler le théorème d'inversion sur les séries de Fourier.

2) Montrer que si $u \in C(\mathbb{T})$ et C^1 par morceaux, alors $u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{2i\pi kt}$ avec CVA et CVU sur $\mathbb{R}$.

3) On note les sommes de Gauss $G(m) = \sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi n^2/m}$. On définit sur $[0, 1]$, $u(t) = \sum_{n=0}^{m-1} e^{2i\pi(n+t)^2/m}$. Utiliser le 2) et montrer que $G(m) = \sqrt{m}\left(1 + \frac{1}{i^m}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x^2}\,dx$ pour tout m. En déduire la valeur des sommes de Gauss et des intégrales de Fresnel.