Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Cours et TD, Année 2006-2007

Equations différentielles.

I. Définition d'une solution

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \qquad (t, y) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^N. \qquad (\mathcal{E})$$

Définition 1, Solution : Une solution de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^N$ telle que (i) $\forall t \in I$, $(t, y(y)) \in \Omega$ et (ii) $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Lemme, Formulation intégrale : Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^N$ est une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$ si et seulement si (i) y est continue, (ii) $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$ et (iii) $\forall t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$.

Définition 2, Prolongement : Soient $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ et $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ deux solutions de $(\mathcal{E})$. On dit que y_2 est un prolongement de y_1 si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$.

Définition 3, Solution maximale : On dit que y est une solution maximale si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

Exercice 1 (Exemples et contre-exemples de solutions)

Résoudre $y' = 2\, y^{3/2}$ et $y' = 3y^{2/3}$ en précisant l'intervalle maximal d'existence.

Exercice 2 (Comparaison de solutions)

Soient y et z dérivables sur $[0, T]$ et telles que $y'(t) = f(t, y(t))$ et $z'(t) < f(t, z(t))$ pour tout $t \in [0, T]$. On suppose que $z(0) < y(0)$. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, on a $z(t) < y(t)$.

Exercice 3 (Régularité des solutions)

Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est de classe C^k, alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe C^{k+1}.

II. Les théorèmes d'existence

Définition 4, Localement lipschitzien par rapport à la seconde variable : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (ici y) si $\forall (\tilde{t}, \tilde{y}) \in \Omega$, il existe $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T] \times \overline{B}(\tilde{y}, r) \subset \Omega$ avec $T, r > 0$ et $k \geq 0$ tels que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, $||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq k||y_1 - y_2||$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue (dans toutes les variables) et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (ici y). Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximale et une seule $y : I \to \mathbb{R}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Théorème de Cauchy-Péano : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Exercice 4 [Cours, Dvlpt] (Cauchy-Lipschitz dans la cas globalement lipschitzien)

1) Rappel: un théorème de point fixe. Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $f : E \longrightarrow E$ telle que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in E$, où $k \in [0, 1[$ (f est contractante).

a) Soient $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_{n+1} = f(x_n)$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

b) Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $x = f(x)$ et que ce point fixe est unique.

c) Montrez que ces résultats (existence et unicité du point fixe) restent vrais si l'on remplace f contractante par l'existence d'une itérée f^K de f (avec $K \in \mathbb{N}^*$) qui soit contractante.

2) Application aux équations différentielles. On se place dans le cas de $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $||f(t, x) - f(t, y)|| \leq k||x - y||$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$ où $k \in \mathbb{R}$.

a) Notons E l'espace $C^0([0,T],\mathbb{R}^N)$ muni de la norme $||y||_E = \sup_{t\in[0,T]} ||y(t)||_{\mathbb{R}^N}$. Montrez que l'application Φ qui à tout élément y de E associe la fonction $\Phi(y)$ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds$ est une application continue de E dans lui-même.

b) Soient $y, \tilde{y} \in E$. Démontrez l'inégalité $||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p \frac{t^p}{p!} ||y-\tilde{y}||_E$, $\forall t \in [0,T]$.

c) En déduire que le problème $(\mathcal{E})$ avec la condition $y(0) = y_0$ admet une unique solution sur $[0,T]$.

Exercice 5 [Cours, Dvlpt] (Cylindres de sécurité et Cauchy-Lipschitz local)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue.

Définition 5, Cylindre de sécurité : On dit que $C = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}(y_0,r_0) \subset \Omega$, avec $\alpha, r_0 > 0$, est un cylindre de sécurité pour $(\mathcal{E})$ si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^N$ telle que $y(t_0) = y_0$ (avec $I \subset [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$) reste contenue dans $\overline{B}(y_0,r_0)$.

1) Soient $T_0, r_0 > 0$. Montrer que pour tout $(t_0,y_0) \in \Omega$ et pour tout cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0,r_0) \subset \Omega$, il existe un cylindre de sécurité $C = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}(y_0,r_0) \subset C_0$.

2) On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t_0,y_0) \in \Omega$. Obtenir $\alpha > 0$ et $r_0 > 0$ afin que pour tout $y \in E = C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha], \overline{B}(y_0,r_0))$, $\Phi(y)$ de $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds$ est dans E.

3) S'inspirer de la preuve de l'exercice précédant pour conclure à l'existence d'une solution sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Exercice 6 [Cours] (Démonstration de Cauchy-Péano local)

On a besoin pour prouver ce résultat des deux énoncés suivants :

Théorème de Schauder : Soit $\Phi : K \to K$ continue où K est fermée convexe de E espace métrique complet avec $\Phi(K)$ relativement compact dans E. Alors Φ admet au moins un point fixe dans K.

Théorème d'Ascoli : Soit L un espace métrique compact, Y un espace métrique et $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné de $C^0(L,Y)$. On suppose que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue, c'est-à-dire que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $d(x,x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Alors $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $C^0(L,Y)$.

On suppose que les hypothèses de Cauchy-Péano sont vérifiées. Il existe $T > 0$ et $r > 0$ tels que $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r) \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $0 < \alpha \leq T$ tel que si on définit sur $E = C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha], \overline{B}(y_0,r))$ l'application $\Phi(y)$ par $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds$, alors Φ a un point fixe dans E et conclure que $(\mathcal{E})$ a une solution telle que $y(t_0) = y_0$ sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Exercice 7 [Cours] (Prolongements pour obtenir les théorèmes globaux)

1) Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer que si y et $\tilde{y}$ sont deux solutions de $(\mathcal{E})$ de I dans $\mathbb{R}^N$ qui coïncident en un point de I alors elles coïncident sur tout I.

2) Toujours sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on pose $\mathcal{F} = \{I$ intervalle ; $t_0 \in I$ et $(\mathcal{E})$ a une solution sur I qui vaut y_0 en $t_0\}$. Pourquoi $\mathcal{F}$ est-il bien définie et non vide ? Construire une solution maximale et conclure au théorème de Cauchy-Lipschitz.

3) Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Péano, par le théorème de Cauchy-Péano local, on a l'existence d'une solution sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. Supposons que la solution est définit sur $I = |a,b|$ intervalle ouvert ou fermé. Montrons qu'alors on peut la prolonger à droite en $\tilde{y} : |a,\tilde{b}| \to \mathbb{R}^N$ maximale à droite.

a) On construit pour cela par récurrence des prolongements successifs $y^{(k)} : |a,b_k| \to \mathbb{R}^N$. Pour $k=1$, on prend $y^{(1)} = y$, $b_1 = b$; puis pour $k \geq 1$, si on suppose que $y^{(k)}$ est construit, on pose $c_{k+1} = \sup\{c\,;\, y^{(k)}$ se prolonge sur $[a,c[\}$ (ensemble non vide ?) et on a $b_k \leq c_{k+1}$ (le montrer). Il existe alors b_{k+1} tel que $b_k \leq b_{k+1} \leq c_{k+1}$ et tel que $y^{(k)}$ se prolonge sur $[a, b_{k+1}[$ en $y^{(k+1)}$ avec $c_{k+1} - b_{k+1} < 1/(k+1)$ pour $c_{k+1} < +\infty$ et $b_{k+1} > k+1$ sinon.

b) Montrer que $c_{k+1} \leq c_k$ et que les suites (b_k) et (c_k) sont convergentes vers la même limite.

c) En déduire un prolongement maximal à droite.

d) On procède de même à gauche et pour conclure, montrer que l'intervalle d'existence de la solution maximale est ouvert.

Exercice 8 (Résolution d'une équation différentielle)

On cherche à résoudre $(\mathcal{E}) : xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0$.

1) Par la technique du développement en série entière, obtenir une solution que l'on notera y_1.

2) On pose $y(x) = \lambda(x)y_1(x)$. Quelle équation différentielle vérifie λ ? La résoudre et en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 9 (Calcul d'une intégrale généralisé à paramètre)

On cherche à calculer $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\, dt$.

1) Montrer que Φ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que Φ est solution de $y + xy' - 2y'' = 0$ avec les conditions $y(0) = \sqrt{\pi}$, $y'(0) = 0$.

3) Résoudre cette équation et conclure à la valeur de Φ.

Exercice 10 (Contre-exemple en dimension infinie)

Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste vrai dans un espace de dimension infinie ce qui n'est pas le cas du théorème de Cauchy-Péano. En voici un exemple.

Soit c_0 l'espace de Banach des suites réelles qui tendent vers 0 muni de la norme $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On définit f de c_0 dans c_0 selon $f(y)_n = \sqrt{|y_n|} + \frac{1}{n+1}$. Montrer que f est continue sur c_0 mais que $y' = f(y)$ avec la condition $y(0) = 0$ n'a pas de solution y dans $C^1([0, T], c_0)$.

III. Lemme de Gronwall

Lemme de Gronwall : Soit a une fonction de classe C^1 sur $[0, T]$ et u, v des fonctions continues sur $[0, T]$ avec $v \geq 0$. On suppose que $u(t) \leq a(t) + \displaystyle\int_0^t u(s)v(s)\, ds$. Alors $u(t) \leq \sup\limits_{0\leq s\leq t} |a(s)| e^{\int_0^t v(s)\, ds}$.

Exercice 11 [Cours] (Lemme de Gronwall)

Montrez-le ! (On pourra commencer par le cas où a est constante.)

Exercice 12 (Une application de Gronwall)

En déduire que pour $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, > 0 et croissante, toute solution de $y'' + q(t)y = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13 (Inégalité de stabilité)

1) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que $\|u'(t)\| \leq L\|u(t)\| + M$.
Montrer que $\|u(t)\| \leq \|u(t_0)\| e^{L|t-t_0|} + \dfrac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$.

2) Soit y une solution de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$ et $\tilde{y}$ une solution de $\tilde{y}' = \tilde{f}(t, \tilde{y})$ telle que $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$. On suppose que $\|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)\| \leq M$ et $\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$. Obtenir une estimation de la différence entre y et $\tilde{y}$.

Remarque : Ceci permet de voir que de petites variations sur la vitesse initiale et le champ de force entraine de petites variations sur la trajectoire du point.

IV. Théorème des bouts

Théorème des bouts : Soit $\Omega =]a, b[\times \Omega'$ avec Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (ici y). Soit $y :]c, d[\to \mathbb{R}^N$ une solution maximale avec $d < b$. Alors pour tout compact $K \subset \Omega'$, il existe un voisinage V de d tel que $y(t) \notin K$ pour tout $t \in V$. (C'est-à-dire que $t \mapsto y(t)$ sort de tout compact de Ω' lorsque $t \to d$).

Exercice 14 [Cours] (Théorème des bouts)

1) On commence par affiner le résultat sur les cylindres de sécurité. On se place dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz. Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un cylindre de sécurité $C = [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \times \overline{B}(y_0, r_1) \subset \Omega$, avec $\beta, r_1 > 0$, tel que pour tout $(\tilde{t_0}, \tilde{y_0}) \in C$, il existe une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(\tilde{t_0}) = \tilde{y_0}$ définie sur $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$.

2) On cherche maintenant à montrer le théorème des bouts. Par l'absurde on suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega'$ et une suite $t_n \to d$ telle que $y(t_n) \in K$ pour tout n. Construire une solution qui prolonge strictement la solution maximale pour aboutir à la contradiction.

3) Ecrire l'énoncé dans le cas où $\Omega' = \mathbb{R}^N$.

Exercice 15 (Solutions globales)

Définition 6, Solution globale : Dans le cas où $\Omega = I \times \Omega'$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

1) Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et bornée. Montrer que toute solution maximale est globale.

2) Montrer que c'est encore vrai si on remplace l'hypothèse f bornée par l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que $\|f(t, x)\| \leq C_1\|x\| + C_2$ pour tout $(t, x) \in]a, b[\times \mathbb{R}^N$.

V. Deux classes d'équations

Exercice 16 (Equation autonome)

Une équation autonome est une équation $(\mathcal{A})$ de la forme $y' = f(y)$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1) Soit $y : I \to \mathbb{R}^N$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^N$ deux solutions maximales de $(\mathcal{A})$ telles qu'il existe $t_0 \in I$ et $t_1 \in \tilde{I}$ tels que $y(t_0) = \tilde{y}(t_1)$. Montrer qu'alors $\{y(t)\,;\, t \in I\} = \{\tilde{y}(t)\,;\, t \in \tilde{I}\}$.

2) Soit $y : I \to \mathbb{R}^N$ une solution maximale de $(\mathcal{A})$. Montrer que s'il existe $t_2 > t_1$ tels que $y(t_1) = y(t_2)$, alors y admet un prolongement périodique à $\mathbb{R}$ tout entier.

3) On suppose que $N = 1$ et que f est de classe C^1, $f > 0$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds < +\infty$.

a) Montrer que $G(s) = \int_{y_0}^{s} \frac{1}{f(\sigma)}\, d\sigma$ est une bijection de $[y_0, +\infty[$ sur $[0, \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds[$.

b) En déduire que la solution maximale y telle que $y(t_0) = y_0$ est définie sur $]T_*, T^*[$ avec $T^* = t_0 + \int_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds$.

c) Montrer de même que $T_* = t_0 - \int_{-\infty}^{y_0} \frac{1}{f(s)}\, ds$.

Exercice 17 (Equation de Newton)

Une équation de Newton est une équation de la forme $y'' = f(y)$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Ici, on s'intéressera au cas particulier de $(\mathcal{N}) : y'' + 2y^3 = 0$.

1) Montrer l'existence d'une intégrale première pour $(\mathcal{N})$, c'est-à-dire d'une application E telle que $\frac{d}{dx}(E(y(x))) = 0$ pour toute solution de $(\mathcal{N})$. En déduire que toutes les solutions maximales sont globales.

2) Soit y une solution maximale de $(\mathcal{N})$.

a) Montrer que les zéros de y sont isolés et que y s'annule au moins une fois.

b) Montrer que y ne possède pas de plus grand zéro.

c) Montrer que y est périodique.

Bibliographie :

- Demailly, Analyse numérique et équations différentielles (référence principale + ex 3 et 7)
- Gourdon (ex 12 et 14)
- Leichtman, Schauer, tome 4 (ex 2, 8, 9 et 13)
- Pommellet (ex 16 et 17)
- Zuily, Queffélec (ex 1, 10, 15 et 16)